DROITES DANS LE PLAN

I INTRODUCTION

Dans le plan muni d'un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, on cherche à établir une relation entre les coordonnées $(x;y)$ des points du plan appartenant à une droite $\mathscr{D}$.

EXEMPLE 1

Dans le plan muni d'un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, on considère les points $A(-2;3)$ et $B(1;-2)$.

$M(x;y)$ est un point de la droite (AB) si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+2\\y-3\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

Soit :

....

....

....

....

....

....

....

EXEMPLE 2

Dans le plan muni d'un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, on considère les points $A(-3;-1)$ et $B(-3;4)$.

$M(x;y)$ est un point de la droite (AB) si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+3\\y+1\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

Soit : ....

....

....

....

....

....

....

II ÉQUATIONS D'UNE DROITE

1 – PROPRIÉTÉ

Soient A et B deux points distincts du plan. M est un point de la droite (AB) si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.

2 – ÉQUATION RÉDUITE D'UNE DROITE

THÉORÈME

Dans le plan muni d'un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, toute droite $\mathscr{D}$ a une équation soit de la forme $x=c$ soit de la forme $y=mx+p$

✻ DÉMONSTRATION

Soit $A\left(x_A;y_A\right)$ et $B\left(x_B;y_B\right)$ deux points distincts du plan.

La droite (AB) est l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}$ sont colinéaires. Soit :

$$\begin{aligned} M\in(AB) &\iff (x_B-x_A)\left(y-y_A\right)-\left(y_B-y_A\right)(x-x_A)=0\\ &\iff (x_B-x_A)\left(y-y_A\right)=\left(y_B-y_A\right)(x-x_A) \qquad (1)\end{aligned}$$

— Si la droite (AB) est parallèle à l'axe des ordonnées :
les points A et B ont la même abscisse $x_A=x_B=c$ d'où, $x_B-x_A=0$. L'équation (1) s'écrit alors :

$$\left(y_B-y_A\right)(x-c)=0 \iff x=c$$

— Si la droite (AB) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées :
les points A et B n'ont pas la même abscisse d'où, $x_B-x_A\neq 0$. L'équation (1) s'écrit alors :

$$\left(y-y_A\right)=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}(x-x_A) \iff y=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}(x-x_A)+y_A$$

Soit en posant $m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$, la droite (AB) a une équation de la forme $y=mx+p$.

THÉORÈME RÉCIPROQUE

L'ensemble des points $M(x;y)$ du plan vérifiant l'équation $x=c$ est une droite parallèle à l'axe des ordonnées.
L'ensemble des points $M(x;y)$ du plan vérifiant l'équation $y=mx+p$ est une droite coupant l'axe des ordonnées au point P de coordonnées $(0;p)$.

✻ DÉMONSTRATION

— Le cas de l'équation $x=c$ est trivial : l'équation $x=c$ caractérise l'ensemble des points du plan qui ont la même abscisse.

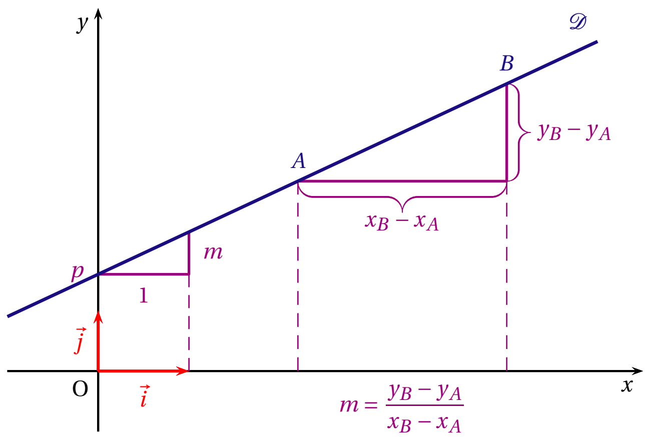
— Cas de l'équation $y=mx+p$
$A(0;p)$ et $B(1;m+p)$ sont deux points distincts de l'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient l'équation $y=mx+p$.

Pour tout point $M\left(x;mx+p\right)$, le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-0\\mx+p-p\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x\\mx\end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x\\mx\end{pmatrix}$ sont colinéaires par conséquent, M est un point de la droite (AB).

REMARQUES

1. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y=mx+p$:

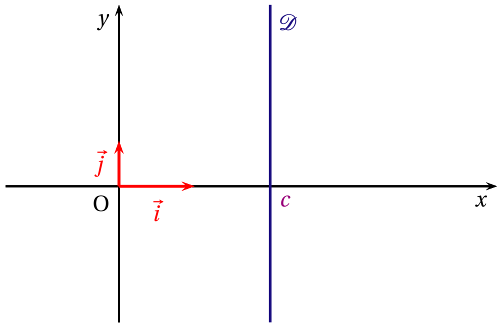


— Le nombre réel m est le coefficient directeur de la droite $\mathscr{D}$;

— Le nombre réel p est l'ordonnée à l'origine de la droite $\mathscr{D}$;

— Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$.

2. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $x = c$:



— La droite $\mathscr{D}$ n'a pas de coefficient directeur ;

— $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$.

3 – DÉTERMINER UNE ÉQUATION DE DROITE

Équation de la droite passant par deux points $A\left(x_A; y_A\right)$ et $B\left(x_B; y_B\right)$.

1. Première méthode

   Soit $M(x; y)$ un point de la droite (AB). On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}X'\\Y'\end{pmatrix}$; on écrit alors la condition de colinéarité

$$XY' - X'Y = 0$$

   EXEMPLE

   Déterminer une équation de la droite $\mathscr{D}$ passant par les points $A(-2; 4)$ et $B\left(1; -\frac{1}{2}\right)$

   $M(x; y)$ est un point de la droite (AB) si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-\frac{9}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+2\\y-4\end{pmatrix}$ sont colinéaires. Soit

2. Seconde méthode

   On distingue deux cas :

   a) Si les points A et B ont la même abscisse, $x_A = x_B = c$ alors la droite (AB) est parallèle à l'axe des ordonnées et a pour équation $x = c$.

   b) Si les points A et B n'ont pas la même abscisse, $x_A \neq x_B$.

   On calcule le coefficient directeur $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ puis, on on détermine l'ordonnée à l'origine à l'aide des coordonnées du point A :

$$y = m\left(x - x_A\right) + y$$

EXEMPLE

Déterminer une équation de la droite $\mathscr{D}$ passant par les points $A(3;1)$ et $B\left(-\frac{1}{2};-\frac{4}{3}\right)$.

III DROITES PARALLÈLES, DROITES SÉCANTES

1 – DROITES PARALLÈLES

Dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = mx + p$ et la droite $\mathscr{D}'$ d'équation $y = m'x + p'$ sont parallèles si, et seulement si, $m = m'$.

✻ DÉMONSTRATION

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix}1\\m'\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}'$:

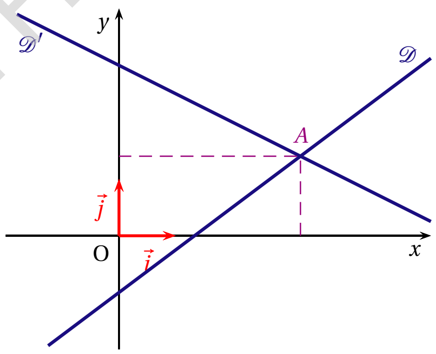
$$\mathscr{D} \,//\, \mathscr{D}' \iff \vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix} \text{ et } \vec{u'}\begin{pmatrix}1\\m'\end{pmatrix} \text{ sont colinéaires } \iff 1\times m' - 1\times m = 0 \iff m = m'$$

REMARQUE

Les droites d'équations $x = c$ et $x = c'$ étant parallèles à l'axe des ordonnées, sont parallèles.

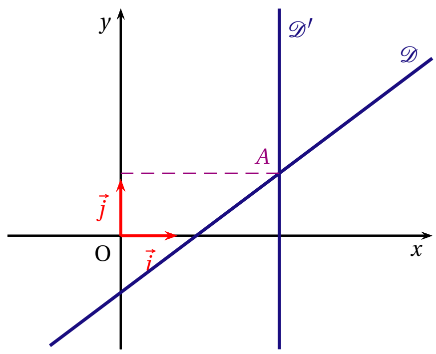
2 – COORDONNÉES DU POINT D'INTERSECTION DE DEUX DROITES SÉCANTES

Dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = mx + p$ et la droite $\mathscr{D}'$ dont l'équation est soit $y = m'x + p'$ avec $m \neq m'$ soit $x = c$.
Déterminer les coordonnées $(x_A; y_A)$ du point d'intersection A de deux droites sécantes c'est résoudre un système d'équations linéaires, formé des équations de chacune des deux droites :



$$\begin{cases} y = mx + p \\ y = m'x + p' \end{cases}$$

ou



$$\begin{cases} x = c \\ y = mx + p \end{cases}$$

EXEMPLE

Soient $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites d'équations respectives $y = -\dfrac{2}{3}x + 3$ et $y = \dfrac{5}{6}x - \dfrac{3}{4}$

Le coefficient directeur de la droite $\mathscr{D}$ est égal à $-\dfrac{2}{3}$ et celui de la droite $\mathscr{D}'$ est égal à $\dfrac{5}{6}$.

Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ont des coefficients directeurs différents donc les deux droites sont sécantes.

Les coordonnées $(x_A ; y_A)$ du point d'intersection A des deux droites correspondent au couple solution du système :

IV SYSTÈME D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

1 – DÉFINITION

Un système linéaire de deux équations à deux inconnues x et y est la donnée de deux équations de la forme $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$, où a, b, c, a', b' et c' sont des réels donnés.

Résoudre un système linéaire de deux équations à deux inconnues x et y c'est trouver tous les couples $(x; y)$ vérifiant les deux équations.

EXEMPLE

Résoudre le système $\begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ 2x + 6y = 1 \end{cases}$