1 La fonction exponentielle

a. Définition et théorèmes

Théorème : Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f' = f \quad \text{et} \quad f(0) = 1$$

Cette fonction est appelée fonction exponentielle et on la note : exp

Démonstration : L'existence de cette fonction est admise.
Montrons que cette fonction ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est unique.

- **La fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$**

  Soit la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = f(x)f(-x)$.

  Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit :
  $$\varphi'(x) = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x) \overset{f'=f}{=} f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0$$
  Comme $\varphi' = 0$ alors la fonction φ est constante. Donc :
  $$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) = \varphi(0) = f^2(0) = 1$$
  On en déduit alors : $f(x)f(-x) = 1$, donc la fonction f ne peut s'annuler.

- **Unicité de la fonction exponentielle.**

  On suppose que deux fonctions f et g vérifient les conditions :
  $$\begin{cases} f = f' \text{ et } f(0) = 1 \\ g' = g \text{ et } g(0) = 1 \end{cases}$$
  On pose $h = \dfrac{f}{g}$ définie sur $\mathbb{R}$ car g ne s'annule pas.
  La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ par quotient de fonctions dérivables :
  $$h' = \frac{f'g - fg'}{g^2} = \frac{fg - fg}{g^2} = 0$$
  La fonction h est donc constante et $h(x) = \dfrac{f(0)}{g(0)} = 1$

  On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = g(x)$.

  On en déduit que $f = g$. La fonction exponentielle est unique.

b. Relation fonctionnelle

Théorème : Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$: $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$

Remarque : Cette relation s'appelle "relation fonctionnelle" car on pourrait définir l'exponentielle à partir de cette propriété puis montrer qu'alors la fonction exponentielle est égale à sa dérivée.

Démonstration : Posons la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \dfrac{\exp(x+a)}{\exp(a)}$.

h est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition de fonctions dérivables :

$$h'(x) = \frac{\exp'(x+a)}{\exp(a)} = \frac{\exp(x+a)}{\exp(a)} = h(x) \quad \text{et} \quad h(0) = \frac{\exp(0+a)}{\exp(a)} = 1$$

La fonction h correspond alors à la définition de la fonction exponentielle.

On a alors : $\dfrac{\exp(x+a)}{\exp(a)} = \exp(x) \quad \Leftrightarrow \quad \exp(x+a) = \exp(x) \times \exp(a)$

En prenant $x = b$ on a alors : $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$

c. Autres opérations

Théorème : Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et pour tous $n \in \mathbb{N}$:

1) $\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$ 2) $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$ 3) $\exp(na) = [\exp(a)]^n$

Démonstration :

1) On a vu au 1.1 que : $f(x)f(-x) = 1$
2) On remplace dans la relation fonctionnelle b par $(-b)$ puis relation 1)
3) Raisonnement de proche en proche à l'aide de la relation fonctionnelle.

1.5 Notation

Définition : : De la similitude des propriétés de la fonction exponentielle et de la fonction puissance, on pose : $e^x = \exp(x)$ avec $e = \exp(1) \approx 2,718$

On a ainsi les propriétés :

- $e^{a+b} = e^a \times e^b$
- $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$
- $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$
- $e^{na} = (e^a)^n$

2 Étude de la fonction exponentielle

a. Signe

Théorème : La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$

Démonstration : D'après la relation fonctionnelle : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left[e^{\frac{x}{2}}\right]^2 = e^x$.
La fonction exp ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et un carré est positif ou nul, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x > 0.$$

b. Variation

Théorème : La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : La fonction exp est strictement positive et étant égale à sa dérivée, sa dérivée est strictement positive.

Propriété : De la stricte croissance de la fonction exponentielle :
Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$: $\quad e^a = e^b \quad \Leftrightarrow \quad a = b \quad$ et $\quad e^a < e^b \quad \Leftrightarrow \quad a < b$

Exemples :

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{2x^2+3} = e^{7x}$:

$$e^{2x^2+3} = e^{7x} \overset{\exp\nearrow}{\Leftrightarrow} 2x^2 + 3 = 7x \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - 7x + 3 = 0$$

$\Delta = 49 - 24 = 25 = 5^2 > 0$, deux solutions :

$$x_1 = \frac{7+5}{4} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{d'où} \quad S = \left\{\frac{1}{2} \,;\, 3\right\}$$

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $e^{3x} \leqslant e^{x+6}$

$$e^{3x} \leqslant e^{x+6} \quad \Leftrightarrow \quad 3x \leqslant x + 6 \quad \Leftrightarrow \quad 2x \leqslant 6 \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant 3 \quad \text{soit} \quad S =]-\infty \,;\, 3]$$

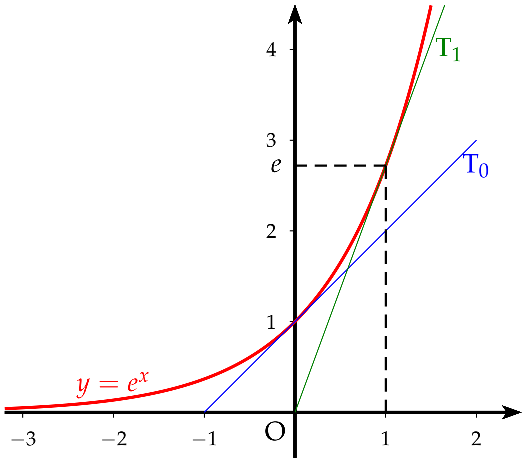
c. Courbe représentative

D'après les résultats obtenus, on a le tableau de variation et la courbe suivante :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$\exp'(x)$				$+$			
$\exp(x)$		0	$\nearrow$ 1		$\nearrow$ e	$\nearrow$	$+\infty$

$\mathrm{T}_0 : \quad y = e^0 x + e^0 = x - 1$

$\mathrm{T}_1 : \quad \begin{cases} y = e(x-1) + e = ex \\ \text{passe par l'origine} \end{cases}$



d. Étude d'une fonction

Soit f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\; f(x) = e^x(x-2)$.
Soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1) Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f.
2) En déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
3) Déterminer l'équation de la tangente T_{-1} à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse (-1).
4) Tracer $\mathscr{C}_f$, T_{-1} dans un repère orthonormé. On précisera la position du minimum. On admettra que l'axe des abscisses est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$.

$\Rightarrow \Rightarrow$

1) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit de fonctions dérivables :

$$f'(x) = e^x(x-2) + e^x \times 1 = e^x(x-2+1) = e^x(x-1)$$

2) Comme $\; \forall x \in \mathbb{R}, \; e^x > 0, \;$ on a :

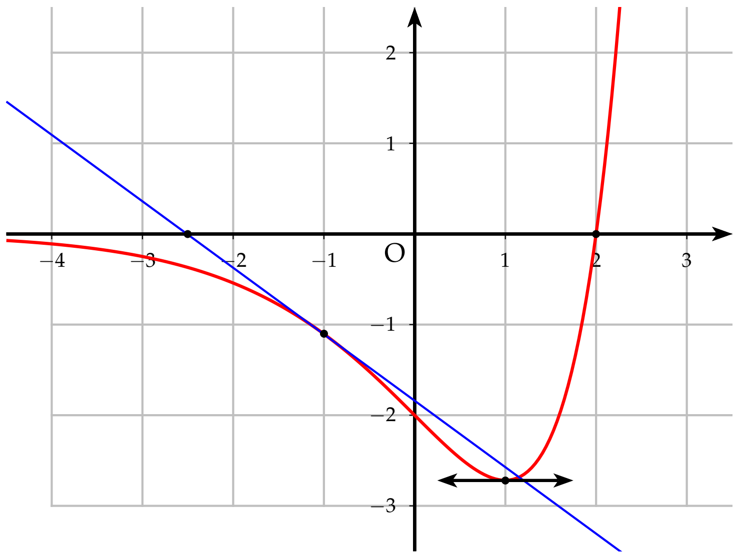
- $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$
- Le signe de $f'(x)$ est celui de $(x-1)$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-e$	$\nearrow$	$+\infty$

3) L'équation de la tangente en (-1) :

$$\mathrm{T}_{-1} \; : y = f'(-1)(x+1) + f(1) \quad \Leftrightarrow \quad y = -2e^{-1}(x+1) - 3e^{-1} \quad \Leftrightarrow$$
$$y = -2e^{-1}x - 5e^{-1}$$

4) Pour tracer T_{-1}, peut prendre ls points : $(-2,5\,;\,0)$
Pour tracer $\mathscr{C}_f$, on prend les points
$(2\,;\,0)$, $(-1\,;-3e^{-1}) \approx (-1\,;-1,1)$ minimum $(1\,;-e) \approx (1\,;-2,7)$



e. Dérivée de la fonction e^u

Théorème : Soit la fonction u définie et dérivable sur un ensemble D, alors la fonction e^u est dérivable sur D et : $(e^u)' = u'e^u$

Exemple : Soient f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{2x-1}$ et $g(x) = e^{-x^2}$
f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$: $f'(x) = 2\,e^{2x-1}$ et $g'(x) = -2x\,e^{-x^2}$

3 Croissance et décroissance exponentielle

Modèle continue

Définition : Soit un réel $k > 0$, on définit les fonctions f_k et g_k sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(t) = e^{kt} \qquad \text{et} \qquad g_k(t) = e^{-kt}$$

Les fonctions f_k correspondent à une **croissance exponentielle**.
Les fonctions g_k correspondent à une **décroissance exponentielle ou atténuation**.

Les fonctions f_k et g_k sont dérivables sur $\mathbb{R}$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_k'(t) = k\,e^{kt} > 0 \quad \text{et} \quad g_k'(x) = -k\,e^{-kt} < 0$$

Les fonctions f_k et g_k sont respectivement croissantes et décroissantes.

On obtient les tableaux de variation :