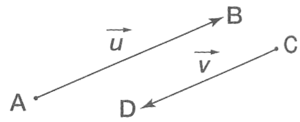
III. Colinéarité de deux vecteurs

Vecteurs colinéaires : dire que deux vecteurs non nuls $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ sont **colinéaires** signifie qu'ils ont la même direction .



Cela signifie que les droites (AB) et (CD) sont parallèles ou confondues .

Théorème : dire que les vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** équivaut à dire qu'il existe un nombre réel k non nul tel que $\vec{v} = k.\vec{u}$

Remarque : par convention , on dit que le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur $\vec{u}$.

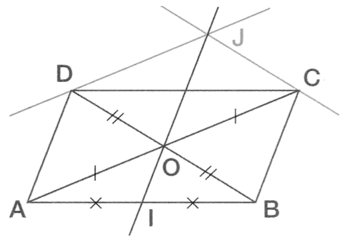
Parallélisme et alignement :

- Dire que les droites (AB) et (CD) sont **parallèles** équivaut à dire qu'il existe un nombre réel k non nul tel que $\overrightarrow{CD} = k.\overrightarrow{AB}$
- Dire que les points distincts A , B , C sont **alignés** équivaut à dire qu'il existe un nombre réel k non nul tel que $\overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{AC}$

Remarque : la colinéarité de deux vecteurs traduit le parallélisme ou l'alignement qui sont des questions essentielles en géométrie .

Comment démontrer que trois points sont alignés ?

ABCD est un parallélogramme de centre O, I est le milieu de [AB]. La parallèle à la droite (AC) passant par D coupe la parallèle à la droite (BD) passant par C au point J. Démontrez que O, I et J sont alignés.



POINT MÉTHODE

Pour démontrer que les points O, I et J sont alignés, il suffit d'établir une relation de colinéarité : $\overrightarrow{OI} = k\overrightarrow{OJ}$.

SOLUTION COMMENTÉE

L'examen de la figure montre que le vecteur $\overrightarrow{OI}$ peut s'exprimer, par exemple, en fonction du vecteur $\overrightarrow{BC}$. En effet dans le triangle ABC, I est le milieu de [AB] et O celui de [BD] ; donc d'après le théorème des milieux, $\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ [1].

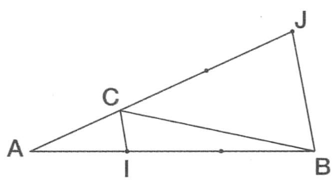
Exprimons $\overrightarrow{OJ}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$.

Par construction, OCJD est un parallélogramme, d'où l'égalité : $\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC}$.
Comme O est le milieu de [BD], $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO}$.
On en déduit que $\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BC}$ [2].
Les égalités [1] et [2] permettent alors d'écrire que $\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OJ}$ donc les points O, I et J sont alignés.

Comment démontrer que deux droites sont parallèles ?

ABC est un triangle, les points I et J sont tels que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC}$.

1. Exprimez $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{BJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Déduisez-en que les droites (IC) et (BJ) sont parallèles.



SOLUTION COMMENTÉE

1. $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC}$ (relation de Chasles). Par hypothèse, $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ d'où $\overrightarrow{IC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. De même :
$\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ}$. Or $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{BJ} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$.
2. Pour démontrer que (IC) est parallèle à (BJ), il suffit de prouver que les vecteurs $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont colinéaires (théorème 4).
Nous remarquons que :

$\overrightarrow{BJ} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = 3\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$ soit $\overrightarrow{BJ} = 3\overrightarrow{IC}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont colinéaires donc les droites (IC) et (BJ) sont parallèles.
Remarque : On peut aussi utiliser la réciproque du théorème de Thalès.