

Les vecteurs

A. Notion de vecteurs

a) Translations et vecteurs

DÉFINITIONS

A et B sont deux points distincts du plan.

La qui transforme en est appelée **translation** de

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour celle de la droite (AB), pour celui de A vers B et pour la longueur AB.

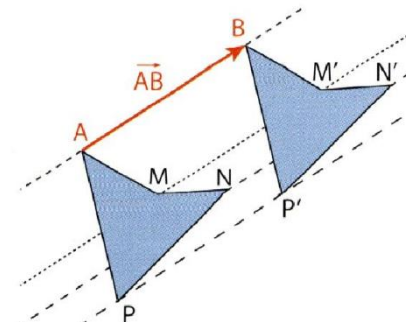
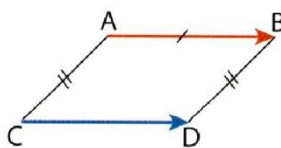


Image D d'un point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$

1^{er} cas : $C \notin (AB)$

D est le point tel que

.....



2^{ème} cas : $C \in (AB)$

D est le point de (AB) tel que et tel que

.....

Par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ les points A, M, N, P ont pour **image** respectives les points

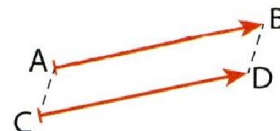


b) Vecteurs égaux

DÉFINITION

Lorsque la translation qui transforme A en B, transforme également C en D, on dit que

On note



$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont même, même et même

CONSÉQUENCE

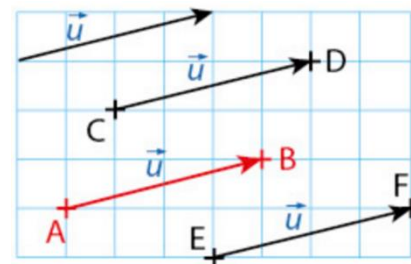
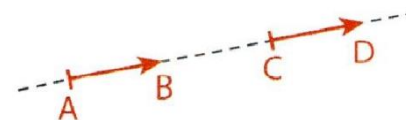
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si, et seulement si, le quadrilatère est un (éventuellement aplati).

• Représentants d'un vecteur

Il existe une infinité de vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Par exemple ci-contre : $\overrightarrow{AB} = \dots = \dots = \dots$

Ce vecteur peut être noté $\vec{u}$ et on dit que $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ sont des du vecteur $\vec{u}$.



• Deux vecteurs particuliers

La translation qui transforme le point A en A est la translation de

Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est appelé, on le note Ainsi
 La translation qui transforme le point B en A est la translation de vecteur.....
 Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est appelé du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
 On note



Exercice 1 : résolu – Démontrer avec des vecteurs

- ABC est un triangle. Construire le point D tel $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.
- M est un point appartenant au segment [BD],
 Les points E et F sont les symétriques respectifs des points B et A par rapport au point M. Démontrer que le quadrilatère CDFE est un parallélogramme.

À votre tour

Exercice 2 :

ABC est un triangle.

I est un point du côté [AB] distinct de B et J un point du côté [BC].

- Construire le point D tel que $\overrightarrow{JD} = \overrightarrow{BI}$.
- Les points E et F sont les symétriques respectifs des points J et D par rapport au point C.
 Démontrer que le quadrilatère BIEF est un parallélogramme.

Exercice 3

ABC est un triangle.

- Placer les points D, E, F et Q tels que $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BD}$ et tels que les segments [AG] et [BF] ont le même milieu C.
- Démontrer que $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{EF}$.
 Que peut-on en déduire pour les droites (AG) et (EF)?
- Démontrer que les droites (BF) et (DG) sont parallèles.
- Démontrer que les droites (AF) et (BG) sont parallèles.

Exercice 4

ABCD est un parallélogramme.

I est le symétrique de B par rapport à A et J est le symétrique de D par rapport à C.

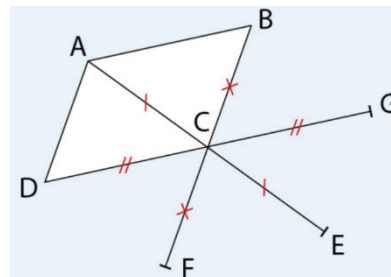
- Citer des vecteurs égaux de cette figure.
- En déduire que AICJ est un parallélogramme.

Exercice 5

ABCD est un parallélogramme.

E, F et G sont les symétriques respectifs de A, B et D par rapport à C.

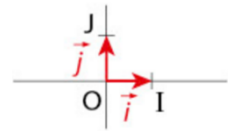
- Démontrer que $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FE}$.
- Démontrer que les droites (CF) et (GE) sont parallèles.



B. Coordonnées d'un vecteur

Bien souvent, au lieu de noter $(O ; I, J)$ un repère, on le note $(O; \vec{i}, \vec{j})$ avec $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$.

a) Coordonnées d'un vecteur



DÉFINITION

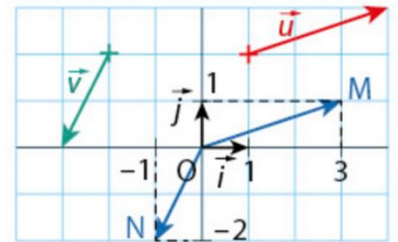
Dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$, les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ sont les coordonnées tel que

EXEMPLES

Dans le repère ci-contre, M a pour coordonnées $(... ; ...)$ et $\vec{u} = \dots$, donc $\vec{u}$ a pour coordonnées $(... ; ...)$.

N a pour coordonnées $(... ; ...)$ et $\vec{v} = \dots$, donc $\vec{v}$ a pour coordonnées $(... ; ...)$.

De même : $\vec{i}(... ; ...)$ et $\vec{j}(... ; ...)$.



PROPRIÉTÉ

Deux vecteurs sont égaux si, et seulement si, leurs

Autrement dit, dans un repère, les vecteurs $\vec{u}(x ; y)$ et $\vec{v}(x' ; y')$ sont égaux **si, et seulement si** et

DÉMONSTRATION

M et M' sont les points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OM'}$.

Ainsi $\vec{u} = \vec{v}$ si, et seulement si, $... = ...$, c'est-à-dire M et M' ont les, autrement dit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont

b) Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

PROPRIÉTÉ

Dans un repère, $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ sont deux points.

Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $(... ; ...)$

DÉMONSTRATION

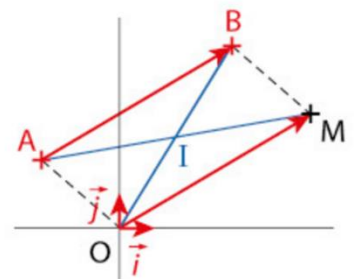
$M(x_M ; y_M)$ est le point tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$.

Les segments $[AM]$ et $[OB]$ ont le même milieu I.

Donc $... = ...$ et $... = ...$ c'est-à-dire

$x_B = ...$ et $y_B = ...$ soit $x_M = ...$ et $y_M = ...$

Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont celles de M, c'est-à-dire $(... ; ...)$.



EXEMPLES

$A(12 ; -4)$ et $B(3 ; 5)$ sont deux points dans un repère.

On a $\overrightarrow{AB}(... ; ...)$ c'est-à-dire $\overrightarrow{AB}(... ; ...)$ soit $\overrightarrow{AB}(... ; ...)$

Exercice 6 : résolu – Démontrer avec des coordonnées de vecteurs

Dans un repère, A(-2 ; 1), B(2 ; 4), C(3 ; 0) et D(-1 ; -3) sont des points.

Démontrer, de deux façons, que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

À votre tour

Exercice 7

Dans un repère on donne les points : I(2 ; -2), J(-1 ; -1), K(0 ; 1), L(-3 ; 2).

- Placer ces points dans un repère.
- Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{KL}$. Contrôler les résultats par une lecture graphique.
- Que peut-on en déduire pour le quadrilatère IJLK?

Exercice 8

On reprend les points I, J, K, L donnés à l'exercice 7.

- Déterminer les coordonnées des milieux des segments [IL] et [JK].
- Que peut-on en déduire pour le quadrilatère IJLK?

Exercice 9

Dans un repère, on donne les points :

A (-2 ; 1), B (3 ; 3), C(-2 ; -4), D(3 ; -6), E (3 ; -2).

- Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{AC}$.
- Les quadrilatères ABEC et AEDC sont-ils des parallélogrammes ? Justifier.

Exercice 10

Dans un repère, on donne les points : A(2,3 ; 5,1), B (4,1 ; 3,8), C (0,9 ; -0,7), D (-0,9 ; 0,5).

- Placer ces points dans un repère et conjecturer la nature du quadrilatère ABCD.
- Démontrer si cette conjecture est vraie ou fausse.

➤ Exercices 26 à 28 de la fiche d'exercices

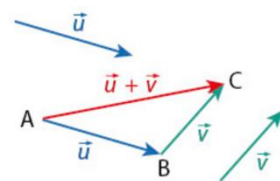
C. Somme de vecteurs

a) Vecteur somme

DÉFINITIONS

La **somme** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur associé à la translation résultant de l'enchaînement des translations de vecteur $\vec{u}$ et de vecteur $\vec{v}$.

On note ce vecteur

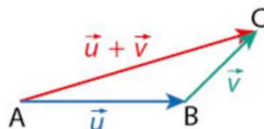


b) Construction du vecteur somme

Pour construire la somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on peut utiliser l'une des deux propriétés suivantes.

PROPRIÉTÉ - Relation de Chasles

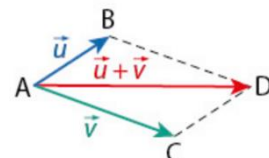
Pour tous points A, B et C :=.....



PROPRIÉTÉ – Règle du parallélogramme

A, B et C sont trois points.

... = ... + ... si et seulement si



DÉMONSTRATION

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ si, et seulement si, d'après la relation de Chasles $\overrightarrow{A...} + \overrightarrow{...D} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
c'est-à-dire $\overrightarrow{...} = \overrightarrow{...}$.

Ainsi ... = ... si, et seulement si,

c) Coordonnées du vecteur somme

PROPRIÉTÉ

Si dans un repère, $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$, alors $\vec{u} + \vec{v}(\dots; \dots)$

DÉMONSTRATION

On note $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{MN}$. Alors $\vec{u} + \vec{v} = \dots = \dots$

Donc les coordonnées du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ sont celles du point Or $\vec{v} = \overrightarrow{MN}$, donc les coordonnées de ces vecteurs sont égales c'est-à-dire :

$x' = \dots$ et $y' = \dots$. D'où $x_N = \dots$ et $y_N = \dots$, soit $\vec{u} + \vec{v}(\dots; \dots)$.

PROPRIÉTÉ

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$:

$$\vec{u} + \vec{v} = \dots \quad \vec{u} + \vec{0} = \dots = \dots \quad (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \dots$$

Exercice 11 : résolu – Construire un vecteur somme

ABCD est un rectangle de centre I.

- Construire le représentant d'origine C du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{BC}$.
- À quel vecteur de la figure, le vecteur $\vec{u}$ semble-t-il égal ?
Prouver cette conjecture.

À votre tour

Exercice 12

ABCD est un parallélogramme.

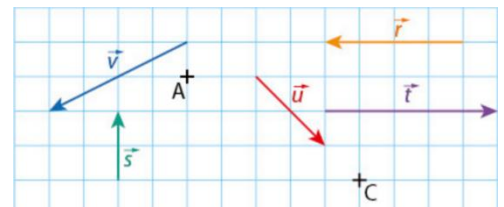
I est le milieu du côté [BC].

- Construire le représentant d'origine B du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{CI}$.
- À quel vecteur de la figure, le vecteur $\vec{u}$ semble-t-il égal ?
- Prouver cette conjecture.

Exercice 13

Placer sur la figure ci-dcontre, les points B et D tels que :

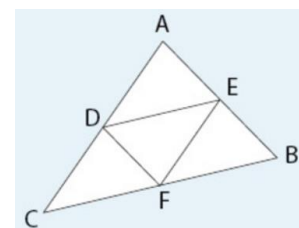
- $\overrightarrow{AB} = \vec{u} + \vec{v}$
- $\overrightarrow{CD} = \vec{r} + \vec{s} + \vec{t}$



Exercice 14

Sur cette figure, AEFD, DEBF et DEFC sont des parallélogrammes.

- Construire cette figure et le représentant d'origine A du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{FE}$.
- Construire le représentant d'origine D du vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA}$.
- Démontrer que $\vec{u} = \vec{v}$.



Exercice 15

ABCD est un carré de centre I.

Construire le point M tel que $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}$.

Que conjecture-t-on ? Prouver cette conjecture.

D. Produit d'un vecteur par un nombre réel

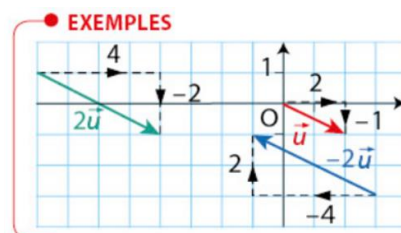
a) Le vecteur $\lambda \vec{u}$

DÉFINITIONS

λ désigne un nombre réel et $\vec{u}(a ; b)$ un vecteur dans un repère.

Le vecteur $\lambda \vec{u}$ est le vecteur de coordonnées $(\dots ; \dots)$.

On admet que le vecteur $\lambda \vec{u}$ ainsi défini est indépendant du repère.



Remarque : aux exemples ci-dessus, les vecteurs $\vec{u}$ et $2\vec{u}$ ont le **même** car $\lambda \dots$ (ici $\lambda = 2$), les vecteurs $\vec{u}$ et $-2\vec{u}$ ont des car (ici $\lambda = -2$).

PROPRIÉTÉS – admises

(1) Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et tous nombres réels λ et λ' :

$$\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \dots \quad (\lambda + \lambda')\vec{u} = \dots \quad (\lambda\lambda')\vec{u} = \dots$$

(2) $\lambda \vec{u} = \vec{0}$ si, et seulement si, $\dots$ ou $\dots$.

(3) Le vecteur $(-1)\vec{u}$ est noté $-\vec{u}$; c'est le seul vecteur tel que $\dots = \vec{0}$.

On note $\vec{u} - \vec{v}$ le vecteur $\dots$

Conséquence de (3) : on sait que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$, donc $\overrightarrow{BA} = \dots$



b) Homothéties et vecteurs

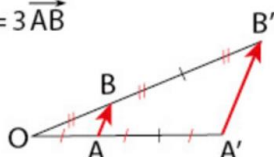
PROPRIÉTÉS – admises

Une homothétie de centre O et de rapport λ , transforme A en A' et B en B'.

Alors $\overrightarrow{OA'} = \dots$, $\overrightarrow{OB'} = \dots$ et $\overrightarrow{A'B'} = \dots$

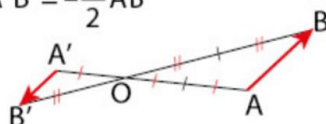
$$\lambda = 3 \quad \overrightarrow{OA'} = 3\overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{A'B'} = 3\overrightarrow{AB}$$



$$\lambda = -\frac{1}{2} \quad \overrightarrow{OA'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$$

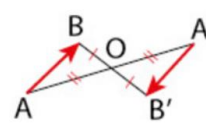
$$\overrightarrow{A'B'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$



$$\lambda = -1 \quad \overrightarrow{OA'} = -\overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}$$

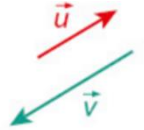
(symétrie
de centre O)



c) Colinéarité de vecteurs

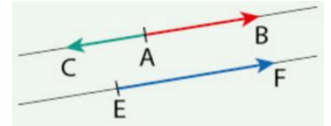
DÉFINITIONS

- Dire que deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont signifie qu'il existe un nombre réel λ tel que $\vec{v} = \dots$, autrement dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même
- Le vecteur nul est colinéaire à



PROPRIÉTÉS

- Trois points A, B et C sont **alignés** si, et seulement si, les vecteurs et sont
- Deux droites (AB) et (EF) sont **parallèles** si, et seulement si, les vecteurs et sont



Exercice 16 : résolu – Construire un vecteur somme

Dans un repère, on donne les points A(-3 ; 4), B(0 ; 2), C(-6 ; 1) et D(-5 ; 2).

- Placer le point E tel que $\vec{CE} = \frac{1}{2}\vec{AB}$. Déterminer les coordonnées du point E.
- Placer le point F tel que $\vec{BF} = -2\vec{AB}$. Déterminer les coordonnées du point F.
- Les points D, E et F sont-ils alignés ?

À votre tour

Exercice 17

Dans un repère, on donne les points : A(1 ; -1), B(2 ; 1), C(4 ; -1), D(6 ; -2)

- Placer le point E tel que $\vec{AE} = \frac{3}{2}\vec{BC}$. Déterminer les coordonnées du point E.
- Placer le point F tel que $\vec{CF} = -3\vec{AB}$. Déterminer les coordonnées du point F.
- Les points D, E et F sont-ils alignés ?

Exercice 18

Dans un repère, on donne les points : A(-2 ; -1), B(2 ; 1), C(0 ; 5), D(3 ; 14)

- Placer le point E tel que $\vec{AE} = 3\vec{AB}$.
 - Calculer les coordonnées du point E.
- F est l'image du point C par l'homothétie de centre A et de rapport 3. Placer le point F.
 - Calculer les coordonnées du point F.
- Les points A, F et D sont-ils alignés ?

Exercice 19

Dans un repère, on donne les points : A(0 ; 4), B(-2 ; 1), C(3 ; -1).

- Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.
- Placer le milieu I du segment [CD] et déterminer les coordonnées du point I.
- Placer le point J tel que $\vec{BJ} = 2\vec{BI}$ et déterminer les coordonnées du point J.
- Déterminer le nombre réel k tel que $\vec{AJ} = k\vec{AD}$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 20

Dans un repère, on donne les points A(1 ; 2), B(-3 ; 0) et C(-14 ; a) où a désigne un nombre réel.

- Exprimer les coordonnées du vecteur $\vec{BC}$ en fonction de a.
- Déterminer la valeur de a pour laquelle les points A, B et C sont alignés.