1 Équations de droites

1.1 Vecteur directeur d'une droite

Définition 1 : Soit une droite d définie par deux points A et B. Un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d est le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

Remarque : Le vecteur $\vec{u}$ n'est pas unique, car 2 points quelconques de la droite définissent un vecteur directeur. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs directeurs de la droite d, alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. On a donc $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Exemple : Soit la droite (AB) définie par : $\mathrm{A}(3; -5)$ et $\mathrm{B}(2; 3)$

Le vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ est un vecteur directeur de la droite (AB), on alors :

$$\vec{u} = (2-3\,;\,3-(-5)) = (-1;8)$$

Théorème 1 : Une droite est entièrement définie si l'on connaît un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$.

Démonstration : La démonstration est immédiate car à partir du point A et du vecteur directeur $\vec{u}$, on peut déterminer un autre point B tel que : $\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$

1.2 Équation cartésienne d'une droite

Théorème 2 : Soit une droite d du plan déterminée par un point $\mathrm{A}(x_A; y_A)$ et un vecteur directeur $\vec{u}(-b; a)$, avec a et b non tous les deux nuls. Un équation cartésienne de la droite d est du type :

$$d \;:\; ax + by + c = 0$$

Démonstration : Soit un point $\mathrm{M}(x; y)$ un point quelconque de la droite d. On a alors $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ et $\vec{u}$ colinéaires. Donc leur déterminant est nul.
On a : $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = (x - x_A; y - y_A)$, donc :

$$\det(\overrightarrow{\mathrm{AM}}, \vec{u}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x - x_A & -b \\ y - y_A & a \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ax + by - (ax_A + by_A) = 0$$

On pose $c = -(x_A + y_A)$, on a donc : $ax + by + c = 0$

Exemple : Soit la droite d définie par les point $\mathrm{A}(2; 3)$ et $\vec{u}(-2; 1)$. Déterminer une équation cartésienne de la droite d.

En posant M$(x;y)$, on a :

$$\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & -2 \\ y-3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-2) + 2(y-3) = 0$$

$$x + 2y - 2 - 6 = 0$$
$$x + 2y - 8 = 0$$

Remarque : L'équation cartésienne d'une droite n'est pas unique. On peut toujours multiplier les coefficients par un facteur k non nul. Par exemple, on peut trouver pour la droite de l'exemple : $-2x - 4y + 16 = 0$ en multipliant par (-2).

1.3 Équation réduite d'une droite

Définition 2 : Soit une droite définie par un point A et un vecteur directeur $\vec{u}(-b\,;\,a)$, avec $b \neq 0$ (droite non verticale). On peut alors mettre une équation cartésienne de la droite d sous la forme :

$$d \;:\; y = mx + p$$

où m représente le coefficient directeur de la droite d et p l'ordonnée à l'origine.

Cette équation est appelée *équation réduite* de la droite d. Un vecteur directeur est alors $\vec{v}(1\,;\,m)$.

Démonstration : Une équation cartésienne de la droite d est donc du type :

$$ax + by + c = 0$$

Comme $b \neq 0$, on peut diviser cette équation par b, on obtient alors :

$$\frac{a}{b}x + y + \frac{c}{a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

En posant $m = -\dfrac{a}{b}$ et $p = -\dfrac{c}{a}$, on obtient : $y = mx + p$

On peut choisir comme vecteur directeur $\vec{v}$ colinéaire à $\vec{u}$ en divisant les coordonnées de celui-ci par $-b$. On obtient alors :

$$\vec{v} = \left(1; -\frac{a}{b}\right) \quad \text{comme } m = -\frac{a}{b} \quad \text{on a :} \quad \vec{v} = (1; m)$$

Remarque : lorsque l'on peut trouver l'équation réduite de la droite d, celle-ci est alors la représentation d'une fonction linéaire.

Théorème 3 : Soit $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$ deux points d'une droite d tels que $x_B - x_A \neq 0$, on peut alors trouver les coefficients de l'équation réduite de d. On a alors :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \qquad \text{et} \qquad p = y_A - m x_A$$

Démonstration : Voir le chapitre 4 sur les fonctions affines où ces relations ont été démontrées.

Exemple : Soit la droite (AB) définie par : $A(-1;4)$ et $B(2;6)$

Déterminer l'équation réduite de la droite d.

On a alors :

$$m = \frac{6-4}{2-(-1)} = \frac{2}{3} \qquad \text{et} \qquad p = 4 - \frac{2}{3}(-1) = 4 + \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$$

D'où l'équation réduite de la droite (AB) : $y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{14}{3}$

1.4 Droites particulières

Définition 3 : Droites parallèles aux axes :

- Une *droite horizontale* (parallèle à l'axe des abscisses) a comme équation : $y = a$
- Une *droite verticale* (parallèle à l'axe des ordonnées) a comme équation : $x = b$

1.5 Parallélisme de deux droites

Théorème 4 : Deux droites de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ou de coefficients directeurs m et m' sont parallèles si, et seulement si :

- Leurs vecteurs directeurs sont colinéaires. On a donc : $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$
- Leurs coefficients directeurs sont égaux. On a alors : $m = m'$

2 Système d'équations linéaires

2.1 Définition

Définition 4 : On appelle système d'équations linéaires (S) de deux équations à deux inconnues, le système défini par :

$$(S) \;:\; \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Exemple : Soit le système défini par : $(S) \ : \ \begin{cases} 3x - 7y = 1 \\ 5x + 2y = 29 \end{cases}$

(S) est donc un système linéaire de deux équations à deux inconnues.

2.2 Existence de solution

Chaque équation d'un système linéaire à deux inconnue (S) est assimilable à une équation cartésienne d'une droite. On peut donc assimiler le système linéaire de deux équations à l'intersection de deux droites.

Théorème 5 : L'existence de solution d'un système linéaire (S) de deux équations à deux inconnues dépend de l'intersection des deux droites (D_1) et (D_2) vérifiant chacune l'une des équations du système. Trois cas peut alors se produire :

- Les droites (D_1) et (D_2) sont sécantes. Il existe alors une *unique solution* au système : les coordonnées du point d'intersection de (D_1) et (D_2).
- Les droites (D_1) et (D_2) sont strictement parallèles. Il n'existe *aucune solution* au système.
- Les droites (D_1) et (D_2) sont confondues. Il existe alors une *droite solution* au système.

Les droites composant le système sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires. On crée alors un déterminant, noté δ défini par :

$$\delta = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$$

Les droites sont sécantes si et seulement si le déterminant du système $\delta \neq 0$.

Les droites sont parallèles si et seulement si le déterminant du système $\delta = 0$.

- Les droites sont strictement parallèles si $\dfrac{c}{a} \neq \dfrac{c'}{a'}$
- Les droites sont confondues si $\dfrac{c}{a} = \dfrac{c'}{a'}$