

Nombre et calculs

I. Multiples, diviseurs et nombres premiers

1. Multiples et diviseurs

Définitions - Multiple et diviseur

Soit a et b deux nombres entiers. S'il existe un nombre entier k tel que $a = bk$, on dit que :

- b a ou que b est de a ;
- ou que a est de b ou que a est b .

Exemple

357 est divisible par 3 (car $3 + 5 + 7 = 15$ qui est divisible par 3 et $357 = 3 \times 119$) :

- 357 est divisible par 3 (et par 119) et 3 est un diviseur de 357 (et 119 aussi) ;
- 357 est donc un multiple de 3 (et de 119).

Remarques

- ① Si $a = bk$ alors le reste de la division euclidienne de a par b est, c'est-à-dire que $\frac{a}{b}$ est un
- ② 1 et n sont des de n .

Propriété - Nombres pairs et impairs

Soit n un nombre entier.

n est **pair** si et seulement s'il existe un entier p tel que

n est **impair** si et seulement s'il existe un entier p tel que

Propriété – Carré d'un nombre impair

Si n est impair alors n^2 est

Démonstration

.....

2. Nombres premiers

Définition - Nombre premier

Un nombre premier est un nombre qui admet

Remarque

1 n'est pas premier car

Exemple

Voici la liste des 10 premiers nombres premiers ;

Propriété - Diviseur premier d'un entier

Soit n un nombre entier qui n'est pas premier. Son plus petit diviseur différent de 1 est un nombre premier plus petit ou égal à

Exemple

$12 = \dots = \dots$. Le plus petit diviseur de 12 est ... qui est premier.

Chacun des diviseurs premiers de 12 est plus petit

Propriété - Décomposition d'un nombre entier

Tout nombre entier peut se décomposer de manière unique sous la forme d'un

.....

Définition - Fraction irréductible

Une fraction est irréductible si

.....

Exemple

$\frac{5}{3}$ est une fraction irréductible car

$\frac{12}{15}$ n'est pas une fraction irréductible car

II. Puissances entières d'un nombre relatif

1. Notations a^n et a^{-n}

Définition - Puissances d'un nombre

Pour tout nombre entier n positif non nul, pour tout nombre relatif a :

$$a^n = \underbrace{\dots\dots\dots}_{n \text{ facteurs}}$$

Et, si a est non nul,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{\dots\dots\dots}_{n \text{ facteurs}}}$$

Par convention, $a^0 = \dots$

a^n (lu « .. ») est appelé de a et n est appelé

Remarque

En particulier, $a^1 = \dots$ et $a^{-1} = \dots$

Exemples

$$2^4 = \dots\dots\dots = \dots\dots$$

$$5^{-3} = \dots\dots = \frac{1}{\dots\dots} = \frac{1}{\dots\dots} = \dots\dots$$

La décomposition de 12 en produits de facteurs premiers est

On écrit $12 = \dots\dots$

2. Calculs avec les puissances

Dans tout ce paragraphe, on considère deux nombres entiers relatifs n et m et un nombre a .

Règle - Calculs avec les puissances

$$a^n \times a^m = \dots\dots ; a^n \times b^n = \dots\dots ; \frac{a^n}{a^m} = \dots\dots (a \neq 0) ; (a^m)^p = \dots\dots$$

Démonstration

Si n et m sont positifs : $a^n \times a^m = \dots\dots$

Exemples

$$A = (-2)^4 \times (-2)^3 = \dots \quad B = 7^{-3} \times 7^{-7} = \dots$$
$$C = (-2)^4 \times 5^4 = \dots \quad C = \frac{6}{6^{-3}} = \dots$$
$$E = 10^{-3 \times (-7)} \times 10^{2 \times (-3)} = \dots$$

Remarque

Attention, il n'y a pas de règle avec l'addition ou la soustraction de puissances.

Exemples

$$5^3 + 5^{-2} = 5 \times 5 \times 5 + \frac{1}{5 \times 5} = 125 + \frac{1}{25} = 125,04$$
$$5^{3-2} = 5^1 = 5 \quad \text{et} \quad 5^3 + 5^{-2} \neq 5^{3-2}$$

III. Racine carrée

1. Définitions

Définition - Racine carrée

La racine carrée d'un nombre positif a est le nombre positif, noté \sqrt{a} , dont le carré est a :

Définition - Carré parfait

Un carré parfait est \dots

Remarques

Le carré d'un nombre est toujours \dots

Lorsque a est un nombre strictement négatif, \sqrt{a} \dots

Exemples

$$\sqrt{1} = 1 \text{ car } 1^2 = 1 \text{ et } 1 \text{ est positif} \quad (\sqrt{3,6})^2 = 3,6 \text{ car } 3,6 > 0$$
$$3^2 = 9 \text{ et } 3 \text{ est positif donc } \sqrt{9} = 3 \quad 2 \text{ est positif donc } \sqrt{2} \times \sqrt{2} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

Règle - Racine d'un carré

Pour tout nombre a , $\sqrt{a^2} = \dots$ si \dots et $\sqrt{a^2} = \dots$ si \dots

Exemples

$$\sqrt{(1,3) \times (1,3)} = \dots$$
$$\sqrt{(-5)^2} = \dots$$

2. Calculs avec les racines carrées

Règle - Calculs avec les racines carrées

Pour tous nombres positifs a et b : $\sqrt{a \times b} = \dots$; $\sqrt{\frac{a}{b}} = \dots$ ($b \neq 0$)

Exemples

$$\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \dots\dots\dots$$
$$\sqrt{\frac{36}{25}} = \dots\dots\dots$$

Remarque

Attention $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$

En effet, on a par exemple $25 = 16 + 9$, mais $\sqrt{25} = 5$ et $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$ donc $\sqrt{25} \neq \sqrt{16} + \sqrt{9}$

IV. Ensemble de nombres

Définitions - Ensemble de nombres

- L'ensemble des entiers naturels, noté \mathbb{N} , est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous forme d'un entier positif : $0, 1, 2, 3, \dots$
- L'ensemble des entiers relatifs, noté \mathbb{Z} , est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous forme d'un entier positif ou négatif : $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$
- L'ensemble des nombres décimaux, noté \mathbb{D} , est l'ensemble des quotients qui peuvent s'écrire sous la forme $\frac{a}{n}$ avec a un entier relatif et n un entier positif.
- L'ensemble des nombres rationnels, noté \mathbb{Q} , est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'un quotient $\frac{a}{b}$ avec a un entier relatif et b un entier relatif non nul.

Exemples

$$\frac{6}{3} \in \mathbb{N} \text{ car } \frac{6}{3} = 2 \qquad -45 \in \mathbb{Z} \qquad 12,45 \in \mathbb{D} \text{ car } 12,45 = \frac{1245}{100} = \frac{1245}{10^2} \qquad -\frac{17}{11} \in \mathbb{Q}$$

Définition - Nombres réels

Soit une droite munie d'une origine O et d'une graduation.

L'ensemble des abscisses de l'axe ainsi défini s'appelle **l'ensemble des nombres réels** et se note \mathbb{R} .

Un tel axe est appelé **droite des réels**.

Propriété - Inclusion des ensembles de nombres

Les entiers naturels sont aussi des entiers relatifs qui sont des nombres décimaux qui sont des quotients : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Exemples

- D'après l'activité 1, on peut construire un segment de longueur $\sqrt{2}$ et ce n'est pas un quotient : c'est un nombre réel.
- L'écriture décimale de π n'est pas périodique, ce n'est pas un quotient : c'est un nombre réel.

Propriété - Nature des racines carrées

Soit n un entier. \sqrt{n} est soit un entier dans le cas où n est un carré parfait soit un irrationnel.

Exemple

$\sqrt{5}$ est un nombre irrationnel et $\sqrt{9}$ est un nombre entier.