Devoir commun de mathématiques (*2 heures*)

La qualité de la rédaction, la clarté et la présentation des raisonnements entreront pour une part importante dans la notation.

L'usage de la calculatrice est autorisé en « mode examen » uniquement.

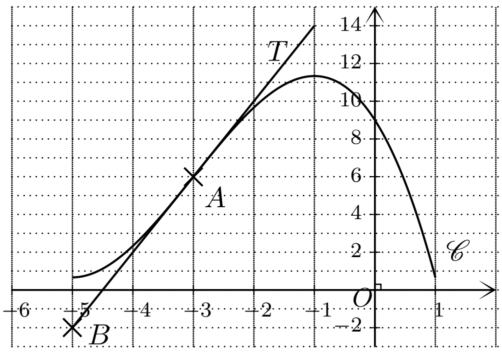
Exercice 1 : (QCM) (2,5 points)

Pour chaque question, une seule des trois réponses proposées est exacte. On indiquera sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie. Chaque réponse exacte rapporte 1/2 point. Aucune justification n'est demandée. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

1. L'inéquation $|x| \geqslant 3$ a pour solution dans $\mathbb{R}$:

   A : $[-3\ ;\ 3]$; **B :** $]-\infty\ ;\ -3] \cup [3\ ;\ +\infty[$; **C :** $[3\ ;\ +\infty[$.

2. On a représenté dans le repère orthogonal ci-contre la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-5\ ;\ 1]$. La droite T est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point $A(-3\ ;\ 6)$ et passe par le point $B(-5\ ;\ -2)$.

   Alors $f'(-3)$ est :

   A : égal à 4 ; **B :** égal à 6 ; **C :** négatif.

3. Soit g la fonction définie et dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1}{x} + 3\sqrt{x}$. L'expression de $g'(x)$ est :

   A : $\dfrac{-2 + 3x\sqrt{x}}{2x^2}$; **B :** $-\dfrac{1}{2x} + \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$; **C :** $\dfrac{-2\sqrt{x} + 3x^2}{x^2 + 2\sqrt{x}}$.

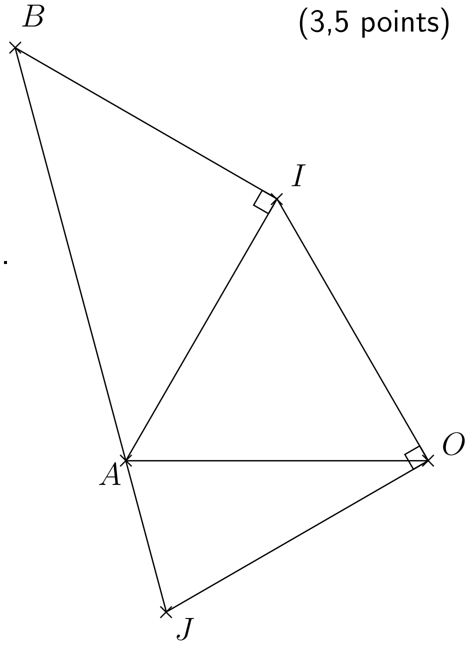
4. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + n$, pour tout entier naturel n.
   u_2 a pour valeur :

   A : 2 ; **B :** 5 ; **C :** 8.

5. Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $w_n = \dfrac{5 \times 2^n}{3^n}$. La suite (w_n)

   A : est croissante ; **B :** est décroissante ; **C :** n'est pas monotone.

Exercice 2 : (3,5 points)



On considère la figure ci-contre où le triangle AOI est équilatéral, et les triangles OIJ et IBA sont rectangles isocèles.

Le but de l'exercice est de calculer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AJ}\right)$ et d'en déduire un résultat.

1. Donner la mesure principale des angles $\left(\overrightarrow{AI}\ ,\ \overrightarrow{AO}\right)$ et $\left(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AI}\right)$. Justifier.
2. a) Quelle est la nature du triangle AJO ? Justifier.

   b) En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AO}\ ,\ \overrightarrow{AJ}\right)$.
3. Déterminer alors une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AJ}\right)$ et conclure.

Exercice 3 : (4 points)

Dans un repère $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points $A(-2 ; 4)$; $B(2 ; 2)$; $C(-5 ; 0)$ et le point D tel que $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$.

On fera une figure que l'on complétera au fur et à mesure de l'exercice.

1. a) Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$? Justifier.
   b) Calculer les coordonnées de D.
2. a) Soit d la droite définie par l'équation $6x + y - 14 = 0$. Vérifier que les points B et D appartiennent à la droite d, puis tracer cette droite.
   b) Déterminer une équation cartésienne de la droite (AC).
   c) Prouver que (BD) et (AC) sont sécantes, puis calculer les coordonnées de leur point d'intersection E.

Exercice 4 : (2 points)

1. Résoudre dans $[0 ; 2\pi[$, l'équation $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
2. Résoudre dans $]-\pi ; \pi]$, l'inéquation $2\cos x + \sqrt{3} \geqslant 0$.
3. Résoudre dans $]-\pi ; \pi]$, l'équation $(\sin x - \frac{1}{2}) \times \cos x = 0$.

Exercice 5 : (4 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3 - 13x^2 + bx - 9$, où a et b sont deux constantes réelles. On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère.

1. Déterminer l'expression de $f'(x)$, fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$, en fonction de a et b.
2. Dans cette question, on désire que la courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 1 et que la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2 ait pour coefficient directeur 3.
   a) Prouver que les réels a et b sont solutions du système
   $$\begin{cases} a + b = 22 \\ 12a + b = 55 \end{cases}$$
   b) Résoudre ce système.
3. On donne $f(x) = 3x^3 - 13x^2 + 19x - 9$, définie sur $\mathbb{R}$.
   a) Montrer que T, la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2 a pour équation $y = 3x - 5$.
   b) Déterminer la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite T.
   On pourra utiliser l'égalité $3x^3 - 13x^2 + 16x - 4 = (3x - 1)(x^2 - 4x + 4)$

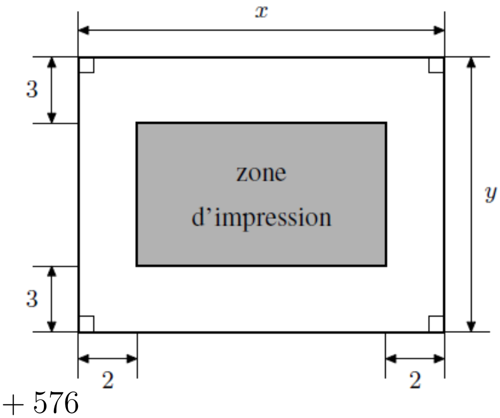
Exercice 6 : (4 points)

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur $]4 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2 + 96x}{x - 4}$.

1. Établir que f', la fonction dérivée de f, est définie sur $]4 ; +\infty[$ par $f'(x) = \dfrac{x^2 - 8x - 384}{(x - 4)^2}$.
2. Étudier le sens de variation de f sur $]4 ; +\infty[$ puis dresser son tableau de variation en y indiquant la valeur de l'extremum mis en évidence.

Partie B



Pour la fabrication d'un livre, on doit respecter sur chaque page des marges de 2 cm à droite et à gauche, 3 cm en bas et en haut. Soient x et y les deux dimensions en centimètres d'une page respectivement horizontalement et verticalement. On a $x \in]4\,;+\infty[$.

1. Exprimer en fonction de x et y l'aire de la partie disponible pour l'impression.
2. On désire que l'aire de la partie disponible pour l'impression soit de 600 cm^2
   a) Prouver que cette contrainte se traduit par l'égalité $y = \dfrac{6x+576}{x-4}$.
   b) En déduire que l'aire $A(x)$ de la page complète est donnée par $A(x) = 6 \times f(x)$.
   c) En vous aidant de la partie A, déterminer les dimensions de la page permettant de minimiser la consommation de papier.