Chapitre 8 - Trigonométrie

A) Rappels et compléments

1) Le cercle trigonométrique

a) Définitions

On appelle **cercle trigonométrique** le cercle de centre O et de rayon 1 dans un repère orthonormal (O, I, J), dans lequel on définit un sens de rotation, qui est le sens inverse des aiguilles d'une montre, ou encore le sens habituel de dévissage.

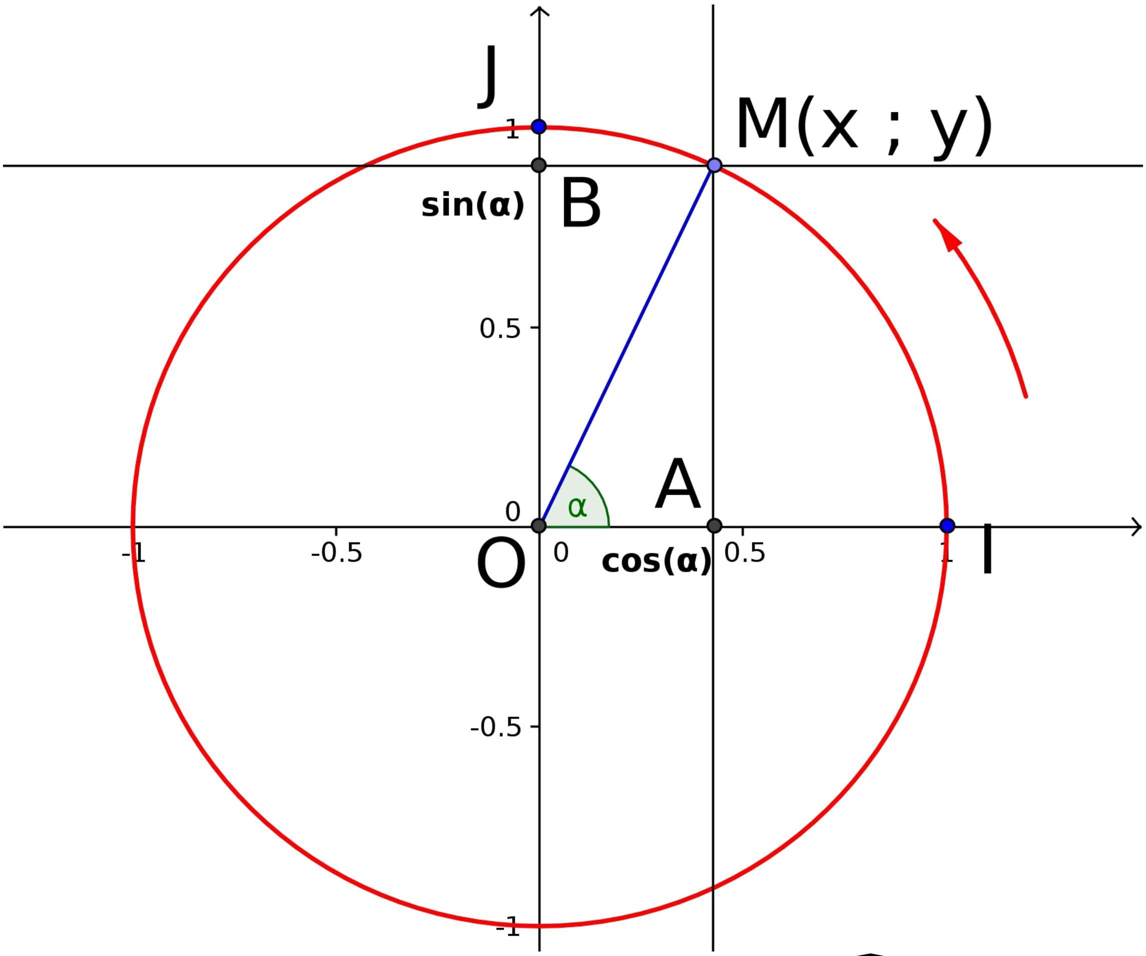
Lorsqu'on définit ce sens de rotation, on dit que le plan est un **plan orienté**.

Les angles sont alors des **angles orientés**.

De même, on définit **l'angle orienté de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $(\vec{u}\ ;\vec{v})$** de la façon suivante : on reporte ces deux vecteurs à partir de l'origine O du repère, ce qui définit deux points d'intersection U et V sur le cercle, quitte à prolonger ces vecteurs mais sans en changer le sens.

L'angle orienté $\widehat{UOV}$ est alors l'angle cherché.

__Remarque :__ on a $\widehat{UOV}=-\widehat{VOU}$ et $(\vec{u}\ ;\vec{v})=-(\vec{v}\ ;\vec{u})$.



Tout point M de ce cercle est entièrement défini par l'angle orienté $\hat{\alpha}=\widehat{IOM}$.

__Remarque :__ un même point peut donc correspondre à un angle négatif ou positif selon le sens dans lequel on choisit de passer de I à M !

b) Radians, degrés et grades

Les angles se mesurent principalement en degrés ou en radians.

En degrés, l'angle droit vaut 90, l'angle plat vaut 180 et l'angle "tour complet" vaut 360.

En radians, la mesure de l'angle est égale à la longueur de l'arc parcouru pour aller sur le cercle trigonométrique de I à M.

Donc, l'angle "tour complet" vaut 2π radians, l'angle plat π radians et l'angle droit π/2 radians.
On a donc (le degré s'écrit ° et le radian s'écrit rd) :

Angle droit = 90° = π/2 rd
Angle plat = 180° = π rd
Tour complet = 360° = 2π rd

Pour parcourir le cercle trigonométrique, on ira donc de 0° à 360°, soit de 0 à 2π radians.

Remarque :
Il existe aussi une autre unité, le grade, peu employée aujourd'hui, proportionnelle elle aussi aux deux autres, et telle que 100 grades = 90° = π/2 rd.

c) Radian et longueur d'un arc de cercle

Soit C un cercle de rayon R et α la mesure en radian d'un angle.

La longueur de l'arc de cercle déterminé par cet angle sera égale à α x R.

Exemples :

Le rayon de la Terre est d'environ 6 378 km. La Terre tourne sur elle-même en 24 heures.

- Quelle est la distance parcourue en 1h30 par un point M de l'équateur ?
- M parcourt 3 000 km :

1) Quel angle en radian parcourt-il ?
2) En combien de temps ?
3) Combien de degrés vaut cet angle ?

2) Propriétés du cercle trigonométrique

a) Passage des degrés aux radians ou vice-versa

Soit d l'angle en degrés et r l'angle en radian, on aura :

$$\mathbf{d = \frac{r \times 90}{\pi}} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{r = \frac{d \times \pi}{90}}$$

Exemples :
Transformer en degrés ou en radians :

60°	-30°	120°
3π/4 rd	π/2 rd	-2π/3 rd

b) Sinus et cosinus dans le cercle trigonométrique

On appellera cosinus de α, noté cos(α), l'abscisse de M, soit x = cos(α).

De même, on appellera sinus de α, noté sin(α), l'ordonnée de M, soit y = sin(α).

Cette définition correspond bien à celle apprise au collège pour les angles aigus. En effet,

OC est bien l'abscisse de M, et $\cos(\widehat{AOM}) = \frac{OC}{OM} = OC$ car OM = 1.

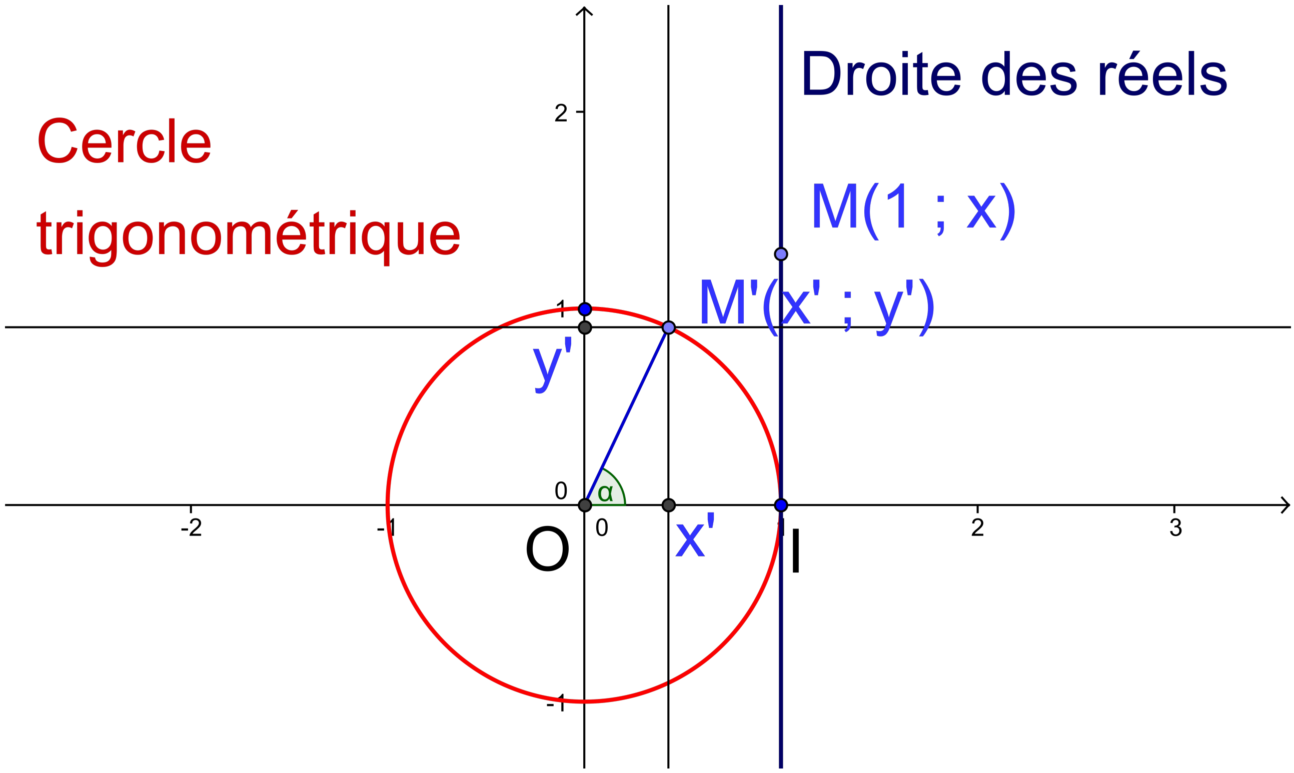
De même, OD est bien l'abscisse de M, et $\sin(\widehat{AOM}) = \frac{OD}{OM} = OD$ car OM = 1.

3) Cercle trigonométrique et droite des réels

À chaque réel, on va faire correspondre un angle sur le cercle trigonométrique, qui correspondra à l'angle orienté $\widehat{IOM}$ où M est obtenu en parcourant sur le cercle et en partant de I, dans le sens normal si x > 0 et en sens inverse sinon, un arc de longueur |x|.

Dans l'opération, on peut bien sûr faire plusieurs tours "pour rien".

On peut représenter cette définition comme un « enroulement » de la droite des réels sur le cercle.



Imaginez que le cercle est un moulinet et la droite des réels un fil de pêche, on peut associer à tout point M de la droite le point M' du cercle où il se retrouvera lorsqu'on aura rembobiné la ligne.

On peut aussi imaginer que le cercle peut rouler sur la droite, et que M' sera le point du cercle qui touchera M.

Dans ce cas, le sinus et le cosinus du réel x qui correspond à M seront égaux aux sinus et cosinus de l'angle associé à M' sur le cercle trigonométrique, soit :

sin(x) = y'   et   cos(x) = x'

Remarques :

- À un réel correspondra un point unique, mais à un point du cercle correspondront une infinité de réels se suivant tous les 2π.

- En faisant varier x de 0 à 2π, ou de -π à π, on trouve déjà tous les points du cercle (car 2π = un tour complet).

- Chaque fois qu'on rajoute ou qu'on enlève 2π, on retrouve le même point du cercle.

4) Justification de cette comparaison

La circonférence du cercle trigonométrique est donnée par la formule $2\pi R$ et dans ce cas $R = 1$.

Donc, lorsqu'on a enroulé un tour, le réel qui est associé au point I est égal à 2π, et l'angle de valeur 2π est le même que l'angle de valeur 0. On a donc fait un tour complet, et on retrouve bien le début des points M du cercle.

De même, la longueur de l'arc $\widehat{AM}$, étant proportionnelle à l'angle $\widehat{AOM}$, est égale à la mesure de cet angle en radians (en valeur absolue).

Longueur de l'arc $\widehat{AM}$ ***= Mesure de*** $\widehat{AOM}$ ***en radians***

Remarque : ceci ne fonctionne que sur le cercle de rayon 1 et en exprimant les angles en radians !

B) Fonctions sinus et cosinus d'un réel

1) Lignes trigonométriques

On a vu que l'on pouvait faire correspondre à tout réel un angle orienté dont on peut déterminer le sinus et le cosinus.

On peut donc définir sur $\mathbb{R}$ les fonctions sin(x) et cos(x). On définit aussi les fonctions tangente et cotangente respectivement par $\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ et $\cot(x)=\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

Ces fonctions sont appelées lignes trigonométriques.

Dans toutes ces fonctions, l'angle x est exprimé en radians.

2) Mesure principale d'un angle

On peut trouver tous les angles possibles entre 0 et 2π ou entre $-\pi$ et π.

Pour l'angle correspondant à un réel quelconque, on définit sa **mesure principale**, qui est la mesure de l'angle équivalent (donnant le même point sur le cercle trigonométrique) compris dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$.

Pour la trouver, on peut procéder de la façon suivante :

Lorsque x est entre π et 3π, on reprend les valeurs déjà connues en prenant $x - 2\pi$.
Lorsque x est entre -3π et $-\pi$, on reprend les valeurs déjà connues en prenant $x + 2\pi$.
Et on continue ainsi, comme si chaque fois qu'on faisait un tour complet, on repartait à 0.
On peut ainsi définir les lignes trigonométriques pour n'importe quel nombre réel.

3) Méthode générale pour trouver l'angle associé à x

Soit x un nombre réel.

Il faut d'abord diviser $x + \pi$ par 2π et garder la partie entière (avant la virgule) du résultat, soit k.
Ensuite, on calcule $x - 2k\pi$ et on trouve ainsi l'angle équivalent à x compris entre $-\pi$ et π.
La seule correction à faire ensuite est de remplacer $-\pi$ par π s'il y a lieu (cas du reste nul).

En effet, on aura bien $x + \pi = k*2\pi + r$ avec $0 \leq r < 2\pi$, soit $0 \leq x + \pi - 2k\pi < 2\pi$, ou encore $-\pi \leq x - 2k\pi < \pi$.

Cette méthode marche pour n'importe quel réel, mais il y a plus simple lorsque l'angle est exprimé sous la forme kπ (voir le 2) plus haut).

Exemples :

Trouver l'équivalent entre 0 et 2π de :

13π/4	-23π/6	127π/3
-32π/2	47π/6	2354π/4
-7,5	59,4	314,2

4) Propriétés des sinus et des cosinus

a) Limites des sinus et cosinus

Pour toute valeur de x, on a : $\boxed{-1 \leq \sin(x) \leq 1}$

Pour toute valeur de x, on a : $\boxed{-1 \leq \cos(x) \leq 1}$

b) Pythagore et les sinus et cosinus

Pour toute valeur de x, on a : $\boxed{\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1}$

c) Parité et périodicité

La fonction sinus est impaire, càd pour tout x, $\boxed{\sin(-x) = -\sin(x)}$

La fonction cosinus est paire, càd pour tout x, $\boxed{\cos(-x) = \cos(x)}$

Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de périodes 2π, ce qui signifie que :

Pour toute valeur de x, on a $\boxed{\sin(x + 2\pi) = \sin(x)}$

Pour toute valeur de x, on a $\boxed{\cos(x + 2\pi) = \cos(x)}$

d) Symétries dans le cercle

Par symétrie dans le cercle trigonométrique, on peut facilement voir que :

$\boxed{\sin(\pi - x) = \sin(x)}$ $\boxed{\cos(\pi - x) = -\cos(x)}$

e) Valeurs remarquables

x	***0***	***π/6***	***π/4***	***π/3***	***π/2***	***π***
cos(x)	***1***	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	***0***	***-1***
sin(x)	***0***	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	***1***	***0***

Démonstrations :

Pour **π/4** : faire un triangle rectangle isocèle et utiliser Pythagore

Pour **π/3** et **π/6** : faire un triangle équilatéral et sa hauteur issue d'un sommet

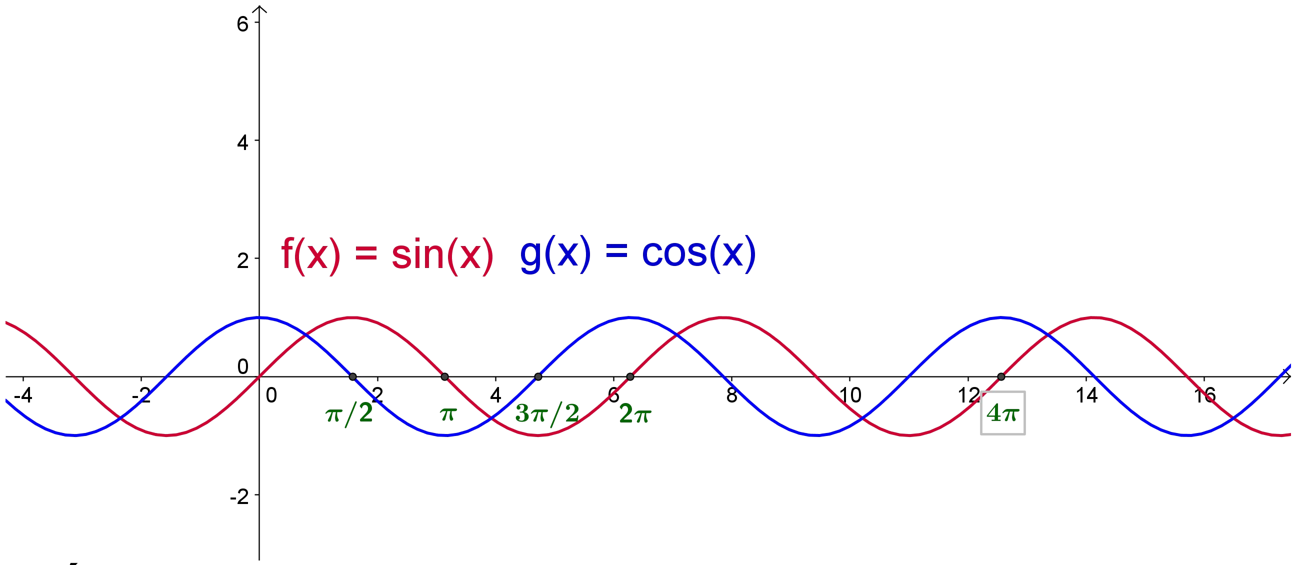
Pour **0,** pour **π/2** et pour **π** : regarder le cercle trigonométrique.

5) Courbes des fonctions sinus et cosinus

Ces courbes s'appellent des sinusoïdes. Leur schéma se reproduit à l'identique dans toutes les périodes d'une longueur de 2 π.

La courbe des sinus est la même que celle des cosinus, mais décalée vers la droite de $\pi/2$.

Ces courbes sont très répandues dans l'univers, même si en général leur oscillation s'atténue : vagues dans la mer, oscillation d'un pendule, vibration d'une corde, etc...



6) Équations sin(x) = sin(a) et cos(x) = cos(a)

On a vu ci-dessus que pour les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π, donc pour qu'on ait sin(x) = sin(a), on peut prendre x = a, mais aussi x = a + 2π, ou a + 4π etc...

Graphiquement en regardant les courbes, on voit qu'une droite horizontale qui coupe une de ces courbes la recoupe une ou deux fois régulièrement.

On résume donc les solutions par la formule $x = a + 2k\pi$, où k est un entier relatif quelconque, il y a donc une infinité de solutions.

Le même raisonnement est valable pour cos(x) = cos(a), dont la solution est aussi $x = a + 2k\pi$.

Exemples (exprimer les résultats en valeur exacte)

a) Trouver la solution de l'équation sin(x) = sin(π/4)

b) Trouver toutes les solutions de cos(x) = cos(-π/3) dans l'intervalle [-3π ; 7π].

c) Résoudre sin(2x) = 0,5 avec x entre -2π et 7π.