Dérivation : Résumé de cours et méthodes

1 Nombre dérivé - Fonction dérivée :

DÉFINITION

- Etant donné f est une fonction définie sur un intervalle I contenant le réel a, f est dérivable en a si $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est égale à un réel que l'on appelle alors nombre dérivé de f en a et que l'on note $f'(a)$.
- Si f est dérivable pour tous les éléments de I, on dit que f est dérivable sur I et on appelle dérivée de f la fonction, notée f', qui à tout a de I associe $f'(a)$, le nombre dérivé de f en a.

Exemple : Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$.
Pour tout a , $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(a+h)^2-a^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} 2a+h = 2a$. f est donc dérivable en a et $f'(a)=2a$.
On dit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa fonction dérivée est définie par $f'(x)=2x$.

2 Dérivées des fonctions usuelles :

Fonction	**Fonction dérivée**	**pour tout x de**	**Exemples**
$f(x)=a$	$f'(x)=0$	$\mathbb{R}$	$f(x)=3 \Rightarrow f'(x)=0$
$f(x)=ax+b$	$f'(x)=a$	$\mathbb{R}$	$f(x)=x \Rightarrow f'(x)=1$ $f(x)=2x-4 \Rightarrow f'(x)=2$
$f(x)=x^n \quad (n\,\text{entier} \geqslant 2)$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$	$f(x)=x^2 \Rightarrow f'(x)=2x$ $f(x)=x^3 \Rightarrow f'(x)=3x^2$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	
$f(x)=\dfrac{1}{x^n} \quad (n\,\text{entier} \geqslant 2)$	$f'(x)=-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$	$f(x)=\dfrac{1}{x^2} \Rightarrow f'(x)=-\dfrac{2}{x^3}$ $f(x)=\dfrac{1}{x^3} \Rightarrow f'(x)=-\dfrac{3}{x^4}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$	
$f(x)=\sin x$	$f'(x)=\cos x$	$\mathbb{R}$	
$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\sin x$	$\mathbb{R}$	

3 Tableau récapitulatif des opérations sur les fonctions dérivables :

Fonction	**Fonction dérivée**
$f+g$	$f'+g'$
$kf \quad (k \in \mathbb{R})$	kf'
fg	$f'g+fg'$
f^2	$2f'f$
$\dfrac{1}{f}$	$-\dfrac{f'}{f^2}$
$\dfrac{f}{g}$	$\dfrac{f'g-fg'}{g^2}$
$x \longmapsto f(ax+b)$ (a et b réels)	$x \longmapsto a \times f'(ax+b)$

4 Calcul d'une équation de la tangente à une courbe en un point :

DÉFINITION

Si f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I contenant le réel a, alors la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est la droite passant par le point $A(a, f(a))$ et dont le coefficient directeur est égal à $f'(a)$.

PROPRIÉTÉ

Si f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I contenant le réel a, alors une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est :
$y = f(a) + f'(a)(x-a)$.

Exemples :

1) Soit T la tangente à la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 3x + 1$ au point d'abscisse 2 .
Une équation de T est : $y = f(2) + f'(2)(x-2)$
- on calcule d'abord $f(2)$: $f(2) = 2^2 - 3 \times 2 + 1 = 4 - 6 + 1 = -1$.
- on dérive f : $f'(x) = 2x - 3$.
- on en déduit la valeur de $f'(2)$: $f'(2) = 2 \times 2 - 3 = 1$.
Une équation de T est donc : $y = -1 + 1 \times (x-2) \Leftrightarrow y = x - 3$

2) Soit T la tangente à la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$ au point d'abscisse -1 .
Une équation de T est : $y = f(-1) + f'(-1)(x-(-1)) \Leftrightarrow y = f(-1) + f'(-1)(x+1))$
- on calcule d'abord $f(-1)$: $f(-1) = \dfrac{2(-1)-1}{-1+3} = -\dfrac{3}{2}$.
- on dérive f : $f'(x) = \dfrac{2 \times (x+3) - (2x-1) \times 1}{(x+3)^2} = \dfrac{2x+6-2x+1}{(x+3)^2} = \dfrac{7}{(x+3)^2}$.
- on en déduit la valeur de $f'(-1)$: $f'(-1) = \dfrac{7}{(-1+3)^2} = \dfrac{7}{4}$.
Une équation de T est donc : $y = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{7}{4}(x+1) \Leftrightarrow y = -\dfrac{6}{4} + \dfrac{7}{4}x + \dfrac{7}{4} \Leftrightarrow y = \dfrac{7}{4}x + \dfrac{1}{4}x$

5 Méthode générale d'étude des variations d'une fonction :

Pour étudier les variations d'une fonction f sur un intervalle I :

- Dériver la fonction f.
- Factoriser si possible la dérivée f' afin de l'exprimer sous la forme d'un produit ou d'un quotient d'expressions du premier ou du second degré.
- Etudier le signe de chaque terme de $f'(x)$ sur l'intervalle I. En déduire le signe de $f'(x)$ à l'aide d'un tableau de signes.
- Dresser le tableau de variations de f sur I en utilisant la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ

f étant dérivable sur I, pour tout intervalle J inclus dans I :

- Si $f'(x) > 0$, pour tout x de J, alors f est strictement croissante sur J.
  (symbolisé par une flèche $\nearrow$ dans le tableau de variations)
- Si $f'(x) < 0$, pour tout x de J, alors f est strictement décroissante sur J.
  (symbolisé par une flèche $\searrow$ dans le tableau de variations)
- Si $f'(x) = 0$, pour tout x de J, alors f est constante sur J.
  (symbolisé par une flèche $\longrightarrow$ dans le tableau de variations)

Remarque : On utilise généralement un seul tableau pour l'étude du signe de la dérivée et les variations de f. (voir exemples)