Chapitre 1 – Suites et récurrence

I. Raisonnement par récurrence

Théorème - Principe du raisonnement par récurrence

Soit $P(n)$ une propriété dépendant d'un entier naturel n. On suppose que :
① … … … … … … …
② Pour tout entier naturel n fixé, si …
Alors pour tout entier naturel n, … … … … … … … … … … … …

Théorème - Principe du raisonnement par récurrence à partir d'un certain rang

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $P(n)$ une propriété définie pour … … … … … … … …. On suppose que :
① … … … … … … … … … … … ….
② Pour tout entier naturel …
Alors pour tout entier naturel … … … … … … … … … … … … … …

Remarque

Pour démontrer par récurrence qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$ on procède en trois étapes.

Étape ① - ………………………………
On vérifie que la …………………………………………………

Étape ② - ……………………………….
Soit n un entier naturel tel que $n \geq n_0$
On suppose que …………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………..

Étape ③ - ………………………………
On conclut que …

Exemple

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $3^n = 5 + 2n$ »
…

Propriété - Inégalité de Bernoulli

Pour tout réel a strictement positif et pour tout entier naturel n : ……………………………..

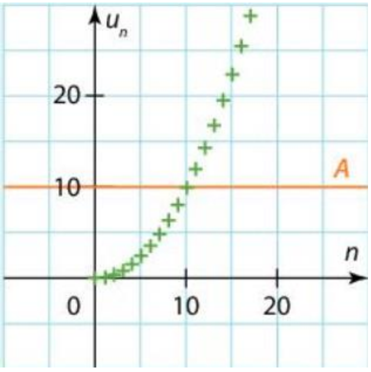
Démonstration

Soit a un réel positif.
…..

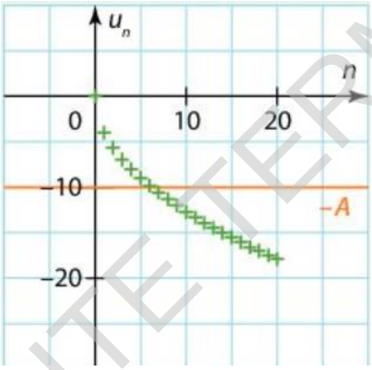
II. Limite d'une suite

Définition - Suite divergeant vers l'infini

- On dit que la suite (u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, si ……………………………………
………
On dit que …………………… et on note … … … … … … … … … … …



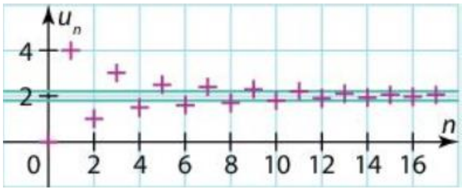
- On dit que la suite (u_n) tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$, si ……………………………………
………..
On dit que … … … … … … … … … … … .. et on note… … … … … … … … … … … … …. .



Exemple
Soit (u_n)la suite définie par $u_n = n^2$.
……

Définition - Suite convergeant vers un nombre réel

On dit que la suite (u_n) tend vers un réel l quand n tend vers $+\infty$, si ………………………………..
………
On que … … … … … … … … … … … … …. et on note … … … … … … … … … … … .



Remarque
Tout intervalle ouvert contenant l contient un intervalle ouvert centré en l, c'est-à-dire de la forme $]l-\epsilon\,;l+\epsilon[$, avec ϵ un réel strictement positif.
On peut donc réécrire la définition : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ si et seulement si ………………………………………….
………..

Théorème - Unicité de la limite

Lorsqu'elle ………………………., la limite est …………………….

Remarque

Une suite qui ne converge pas, ………… Elle peut soit diverger vers $+\infty$ ou $-\infty$ soit n'avoir pas de limite.
Par exemple, la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ n'a pas de limite ………………………………………..

III. Propriétés des limites

Propriété – Limite des suites de référence

- Les suites $(\sqrt{n})$, (n) et (n^k) avec $k \in \mathbb{N}$ tendent vers … … …. quand n tend vers … … .. ce qui s'écrit :

  … … … … … … … … … … … … … . ; … … … … … … … … … … … . ; … … … … … … … … … . . .

- Les suites $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\left(\frac{1}{n^k}\right)$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ tendent vers …. quand n tend vers … … … … ce qui s'écrit :

  … … … … … … … … … … … … … ; … … … … … … … … … … … … …. ; … … … … … … … … … … … ..

Propriété - Limite d'une somme et d'un produit

Soit (u_n) et (v_n) deux suites, et ℓ et ℓ' deux réels.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) =$	$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) =$
ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$	$\ell \times \ell'$
ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty\ si\ \ell > 0$ $-\infty\ si\ \ell < 0$ Indéterminée si $\ell = 0$
ℓ	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty\ si\ \ell > 0$ $+\infty\ si\ \ell < 0$ Indéterminée si $\ell = 0$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	**Indéterminée**	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	**Indéterminée**	$-\infty$

Propriété - Limite d'un quotient

Soit (u_n) et (v_n) deux suites, et ℓ et ℓ' deux réels.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right) =$
ℓ	$\ell' \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$
ℓ	$+\infty$	0
$\ell \neq 0$		
	0^-	$-\infty\ si\ \ell > 0$ $+\infty\ si\ \ell < 0$
$+\infty$	ℓ'	$+\infty\ si\ \ell' > 0\ ou\ \ell' = 0^+$ $-\infty\ si\ \ell' < 0\ ou\ \ell' = 0^-$
$-\infty$	ℓ'	$-\infty\ si\ \ell' > 0\ ou\ \ell' = 0^+$ $+\infty\ si\ \ell' < 0\ ou\ \ell' = 0^-$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	**Indéterminée**
0	0	**Indéterminée**

Remarques

Dans les deux tableaux précédents :

① **indéterminée** signifie que c'est une **……………………….**, et qu'il n'y a pas de ………………………..
……………………………………………………………………………………………...

② $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0^+$ (resp. 0^-) signifie ……………………………………………………………………………..
………..

Exemples

❶ Soit (u_n) la suite définie par $u_n = n\sqrt{n}$
……

❷ Soit (u_n) la suite définie par $u_n = n + \frac{1}{n}$.
… … ..

❸ Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{1}{n^2+n}$.
… … …

IV. Limites et comparaison

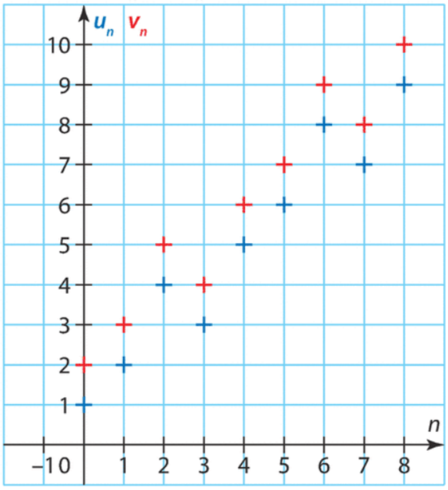
Théorème - Théorème de comparaison

Soit (u_n) et (v_n) deux suites. On suppose qu'il existe un entier n_0, tel que pour tout $n > n_0$, $u_n \leq v_n$.

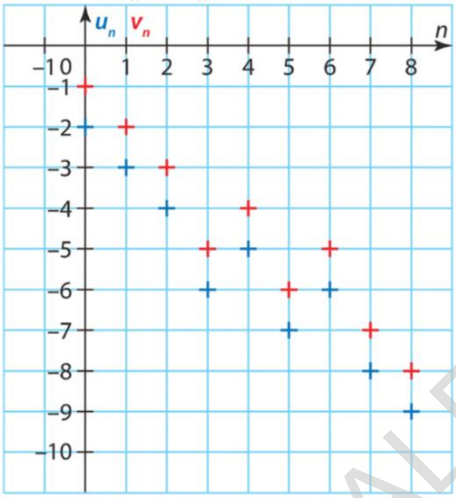
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors … … … … … … … … … ….
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors … … … … … … … … … …

Exemples
Sur les schémas suivants, on a représenté (u_n) en bleu et (v_n) en rouge avec $u_n \leq v_n$

① Les suites (u_n) et (v_n) tendent vers $+\infty$.



② Les suites (u_n) et (v_n) tendent vers $-\infty$.



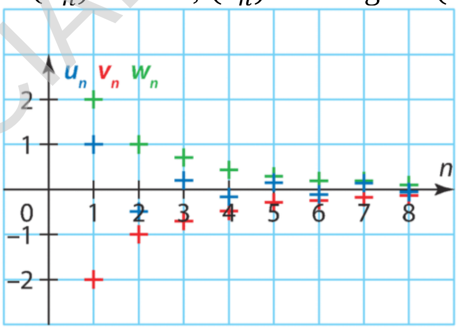
Démonstration
Démontrons la première propriété. Soit $A > 0$.
…

Théorème - Théorème des gendarmes
Soit (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites, et ℓ un réel.
On suppose que :

- il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$, … … … … … … … … … .
- $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n =$ … … …

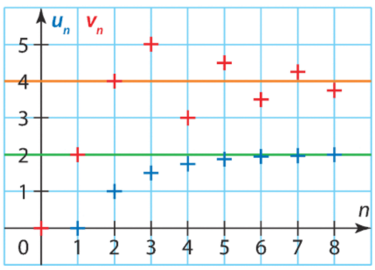
Alors la suite (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$ … …

Exemple
Sur le schéma suivant, on a représenté (u_n) en bleu, (v_n) en rouge et (w_n) en vert.



Propriété - Inégalités et limites
Soit (u_n) et (v_n) deux suites convergentes.
On suppose qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$
Alors … … … … … … … … … … … … … … … ….

Exemple
Sur le schéma suivant, on a représenté (u_n) en bleu et (v_n) en rouge.



V. Suites géométriques et suites monotones

Propriété – Limite d'une suite géométrique
Soit q un réel.

- Si $q > 1$, alors … … … … … … … … … …
- Si $-1 < q < 1$, alors … … … … … … …
- Si $q = 1$, alors … … … … … … … … … ..
- Si $q \leq -1$, alors …………………………

Exemple

$-1 < \frac{1}{2} < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \ldots \ldots$

Démonstration

- Si $q > 1$

….

- Si $0 < q < 1$

….

- Si $-1 < q < 0$

….

Définition - Suite majorée, minorée, bornée
Soit (u_n) une suite définie à partir du rang k.
• On dit que (u_n) est majorée s'il existe un réel M tel que ……………………………………………
• On dit que (u_n) est minorée s'il existe un réel m tel que ……………………………………………
• On dit que (u_n) est bornée si ….

Propriétés - Convergence d'une suite monotone
① Toute suite croissante majorée ……………………….
② Toute suite croissante non majorée ……………………
③ Toute suite décroissante minorée …………………….
④ Toute suite décroissante non minorée ………………..

Démonstration
Démontrons la propriété ②
Soit $A > 0$.
……..

Remarque
Les réciproques des propriétés précédentes sont ……………………….
Par exemple la suite (u_n) définie par $u_n = n^2 + (-1)^n$ ……………………………………………………...