Logarithme népérien.

A Définition

Définition 1

On dit que la fonction exp est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0\,;\ +\infty[$.
Si $e^x = y$, on dit que x est le logarithme népérien de y.
La fonction logarithme népérien, notée ln, est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ qui, à tout réel $x > 0$, associe le nombre noté $\ln(x)$ ou $\ln x$ dont l'exponentielle vaut x.

Pour la fonction exponentielle.
La fonction dérivée est $\forall x \in \mathbb{R},\ exp'(x) = exp(x)$.
on a le tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp'(x) = \exp(x)$		$+$	
exp	0	1	$+\infty$

La fonction exponentielle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. D'après le TVI chaque y valeur de $]0,+\infty[$ admet un unique antécédent que l'on notera $\ln y$:

$$\exp(x) = y \Leftrightarrow x = \ln y$$

On définit ainsi la fonction ln défini sur $]0,+\infty[$. On a :

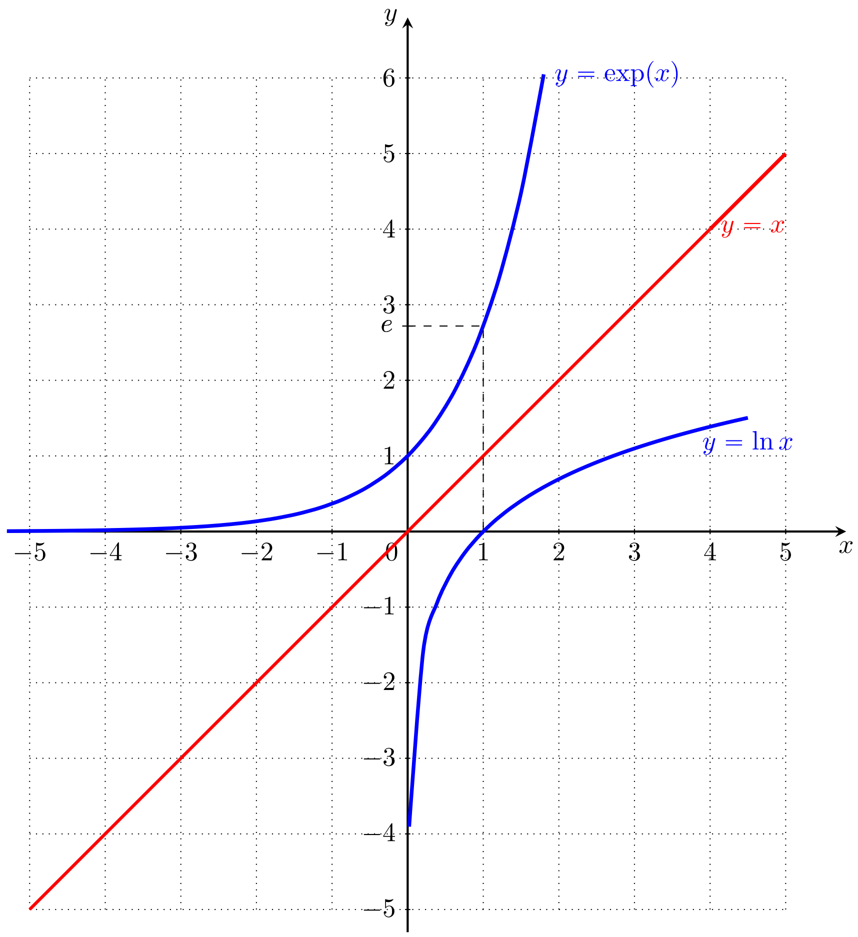
$$\lim_{x\mapsto 0^+} \ln x = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\mapsto +\infty} \ln x = +\infty$$

En utilisant l'expression

$$f^{-1}\left(f(x)\right) = x \text{ donc } \left(f^{-1}\right)'\left(f(x)\right) = \frac{1}{f'(x)}$$

On obtient $\ln'(X) = \dfrac{1}{X}$ en posant $X = e^x \in]0,+\infty[$.
La tableau de variation est :

x	0	1	$+\infty$
$\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$	‖	$+$	
ln	‖ $-\infty$	0	$+\infty$



Proposition 1

- $\forall x \in]0,+\infty[,\ \mathrm{e}^{\ln x} = x$.
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(\mathrm{e}^x) = x$.

Proposition 2

Soient a et b deux réels de $]0,+\infty[$.

- $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$.
- $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$.
- $\ln a < 0 \Leftrightarrow a < 1$.
- $\ln a > 0 \Leftrightarrow a > 1$.

B Propriétés algébriques

Proposition 3

Pour $(x,y) \in]0,+\infty[^2$ et, pour $n \in \mathbb{Z}$ on a :

- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln\left(\dfrac{y}{x}\right) = \ln(y) - \ln(x)$
- $\ln(x^n) = n\ln(x)$
- $\ln(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{2}\ln(x)$

C Limites remarquables et croissance comparée.

Proposition 4

Pour tout nombre réel $\alpha > 0$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$ et, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$. En particulier : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$
Ordre de prépondérance en $+\infty$: " $\ln x \ll x^\alpha \ll e^x$ "

Pour tout $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha \ln x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^\alpha e^x = 0$. En 0, on a l'ordre de prépondérance : " $e^x \ll x^\alpha \ll \ln x$ "
En particulier, pour $\alpha = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$.

Taux d'accroissement remarquable :

$$\lim_{x\mapsto 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\mapsto 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

(Ce sont les coefficients directeurs des tangentes respectivement en 1 et 0 des courbes représentatives des fonctions ln et exp.)

D Dérivation

Proposition 5

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad (\ln \circ u)' = \frac{u'}{u}$$