

## IV. Limite d'une fonction composée

### 1. Fonction composée

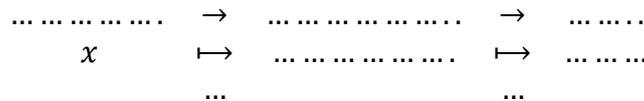
Une composée de deux fonctions correspond à un ..... de deux fonctions l'une après l'autre. Par exemple, composons la fonction  $f: x \mapsto 1 - x$  suivie de  $g: x \mapsto \sqrt{x}$ . On peut ainsi schématiser :



Cependant, on voit que la fonction  $g$  ne peut s'appliquer que si l'ensemble des images par la fonction  $f$  est inclus dans .....

Ainsi, pour appliquer ici la racine carrée, il faut que ..... c'est-à-dire que .....

La composée existe donc dans le schéma suivant où on précise les ensembles de départ et d'arrivée pour  $f$  :



En composant  $f$  suivie de  $g$ , on a ainsi défini sur ..... la fonction  $x \mapsto \dots$

#### Définition

Soit  $f$  une fonction définie sur  $E$  et à valeurs dans  $F$ , et soit  $g$  une fonction définie sur  $F$ .

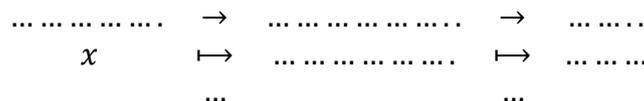
**La composée de  $f$  suivie de  $g$**  est la fonction notée ..... définie sur  $E$  par .....

**Remarque :** Il ne faut pas confondre ..... et ..... qui sont, en général, différentes.

#### Exemple

En reprenant  $f$  et  $g$  de l'exemple précédent, définissons  $f \circ g$ .

La composée de  $g$  suivie de  $f$  est possible en partant de l'ensemble de définition de  $g$  :



En composant  $g$  suivie de  $f$ , on a ainsi défini sur ..... la fonction  $x \mapsto \dots$

### 2. Théorème de composition des limites

#### Théorème

Soit  $h$  la composée de la fonction  $f$  suivie de  $g$  et  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  trois réels ou  $\pm \infty$ .

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow \dots} f(x) = \dots \text{ et } \lim_{x \rightarrow \dots} g(x) = \dots, \text{ alors } \lim_{x \rightarrow \dots} h(x) = \dots$$

#### Exemple

Déterminons la limite en  $-\infty$  de la fonction  $g \circ f$  de l'exemple précédent.

La composée de  $f: x \mapsto 1 - x$  suivie de  $g: x \mapsto \sqrt{x}$  est  $h: x \mapsto \sqrt{1 - x}$  définie sur  $] -\infty; 1]$ .

Or,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - x) = \dots$  (par somme) et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = \dots$  (limite de référence).

Donc, d'après le théorème de composition,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 - x} = \dots$

## Méthode 2 – Déterminer une limite de fonction

On applique les propriétés d'opérations sur les limites.

Si la limite est indéterminée, «  $+\infty + (-\infty)$  », «  $0 \times \infty$  », «  $\frac{\infty}{\infty}$  » ou «  $\frac{0}{0}$  », on essaye de :

- Factoriser par le terme prépondérant ;
- Multiplier par la quantité conjuguée si des racines carrées interviennent ;
- Effectuer un changement de variable (voir théorème de composition des limites).

D'autres techniques existent et seront vues ultérieurement.

### Exercice d'application

Calculer les limites suivantes :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1} \right)$  ;  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$