IV. Limite d'une fonction composée

1. Fonction composée

Une composée de deux fonctions correspond à un …………………… de deux fonctions l'une après l'autre.
Par exemple, composons la fonction $f: x \mapsto 1 - x$ suivie de $g: x \mapsto \sqrt{x}$. On peut ainsi schématiser :

$$\dots\dots \underset{\dots.}{\longmapsto} \dots\dots \underset{\dots.}{\longmapsto} \dots\dots$$

Cependant, on voit que la fonction g ne peut s'appliquer que si l'ensemble des images par la fonction f est inclus dans ……………………………………..
Ainsi, pour appliquer ici la racine carrée, il faut que … … … … … …. c'est-à -dire que … … … … … … …
La composée existe donc dans le schéma suivant où on précise les ensembles de départ et d'arrivée pour f :

$$\begin{array}{ccccc} \dots\dots\dots\dots\dots. & \rightarrow & \dots\dots\dots\dots\dots\dots.. & \rightarrow & \dots\dots.. \\ x & \underset{\dots}{\longmapsto} & \dots\dots\dots\dots\dots\dots. & \underset{\dots}{\longmapsto} & \dots\dots\dots \end{array}$$

En composant f suivie de g, on a ainsi défini sur … … … … … . …. la fonction $x \mapsto$ … … … …..

Définition

Soit f une fonction définie sur E et à valeurs dans F, et soit g une fonction définie sur F.
La composée de f suivie de g est la fonction notée … … … … définie sur E par … … … … … … … … …

Remarque : Il ne faut pas confondre … … … .. et … … … …. qui sont, en général, différentes.

Exemple

En reprenant f et g de l'exemple précédent, définissons $f \circ g$.
La composée de g suivie de f est possible en partant de l'ensemble de définition de g :

$$\begin{array}{ccccc} \dots\dots\dots\dots\dots. & \rightarrow & \dots\dots\dots\dots\dots\dots.. & \rightarrow & \dots\dots.. \\ x & \underset{\dots}{\longmapsto} & \dots\dots\dots\dots\dots\dots. & \underset{\dots}{\longmapsto} & \dots\dots\dots \end{array}$$

En composant g suivie de f, on a ainsi défini sur … … … … … …. la fonction $x \mapsto$ … … … …..

2. Théorème de composition des limites

Théorème

Soit h la composée de la fonction f suivie de g et α, β et γ trois réels ou $\pm\infty$.

$$\text{Si } \lim_{x \to \dots} f(x) = \dots\dots \text{ et } \lim_{x \to \dots} g(x) = \dots\dots \text{, alors } \lim_{x \to \dots} h(x) = \dots\dots.$$

Exemple

Déterminons la limite en $-\infty$ de la fonction $g \circ f$ de l'exemple précédent.
La composée de $f: x \mapsto 1 - x$ suivie de $g: x \mapsto \sqrt{x}$ est $h: x \mapsto \sqrt{1-x}$ définie sur $]-\infty; 1]$.
Or, $\lim_{x \to -\infty} (1 - x) =$ … … .. (par somme) et $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} =$ … … .. (limite de référence).
Donc, d'après le théorème de composition, $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{1-x} =$ … … ..

Méthode 2 – Déterminer une limite de fonction

On applique les propriétés d'opérations sur les limites.

Si la limite est indéterminée, « $+\infty + (-\infty)$ », « $0 \times \infty$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ » ou « $\frac{0}{0}$ », on essaye de :

- Factoriser par le terme prépondérant ;
- Multiplier par la quantité conjuguée si des racines carrées interviennent ;
- Effectuer un changement de variable (voir théorème de composition des limites).

D'autres techniques existent et seront vues ultérieurement.

Exercice d'application

Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^2-3x+1}{x^2-1}\right)$; $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$