Limites et continuité

I. Limite d'une fonction en l'infini

Dans toute cette partie, $\mathcal{C}_f$ désigne la courbe représentative de la fonction f dans un repère quelconque du plan.

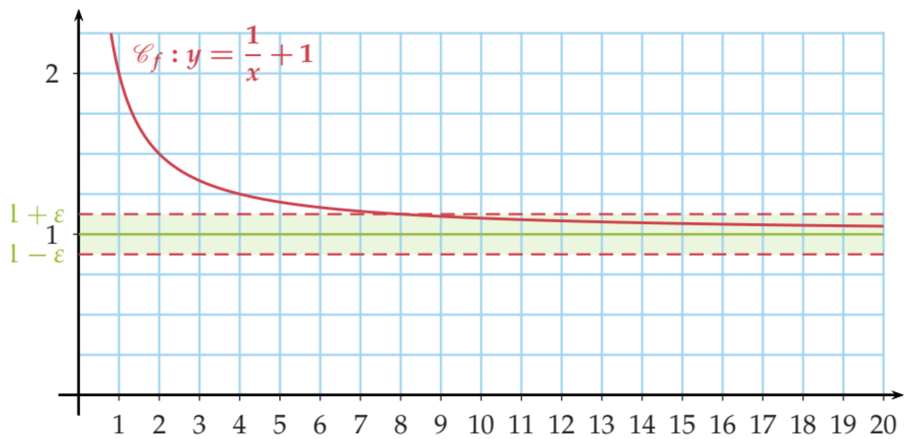
1. Limite finie en l'infini

Définition

Soit f une fonction définie au moins sur un intervalle de $\mathbb{R}$ du type $]a; +\infty[$.
La fonction f a pour limite ℓ en $+\infty$ si ……………………………………………………………...
……………………………………………………………………………………………
On note alors : … … … … … … … ….

Exemple

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x} + 1$. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} + 1\right) =$ … … ..
En effet, l'inverse de x se rapproche de 0 à mesure que x augmente.
Soit un intervalle ouvert I tel que $1 \in I$. Alors, $f(x)$ sera toujours dans I pour x assez grand.
Graphiquement, aussi étroite que soit une bande parallèle à la droite d'équation $y = 1$ et qui la contient, il existe toujours une valeur de x au delà de laquelle $\mathcal{C}_f$ ne sort plus de cette bande.



Définition : Asymptote horizontale

La droite d'équation … … … … …. est ………………………… à $\mathcal{C}_\mathbf{f}$ en $+\infty$ si … … … … … … … … … …

Remarque : On définit de façon analogue … … … … … … … qui caractérise une asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$ d'équation … … … … … … …

Exemple

On a vu précédemment que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} + 1\right) =$ … .. On a aussi $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x} + 1\right) =$ … ..
Donc, la droite d'équation … … … … … est ………………………………… à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

Propriétés admises : Limites finies des fonctions usuelles en $\pm\infty$

Soit n un entier naturel non nul.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n} = \dots\dots\dots \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^n}\right) = \dots\dots..$$

2. Limite infinie en l'infini

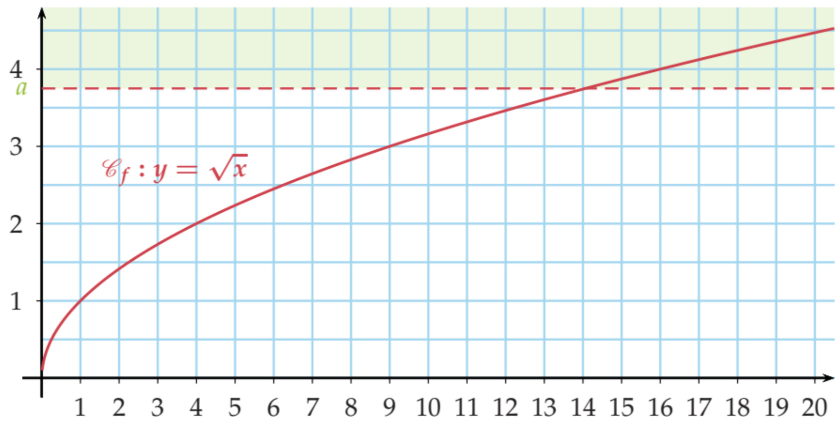
Définition

La fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle de $\mathbb{R}$ du type $]a;+\infty[$ contient …………
…………………………………………………….
On note alors : … … … … … … … … … … … … ….

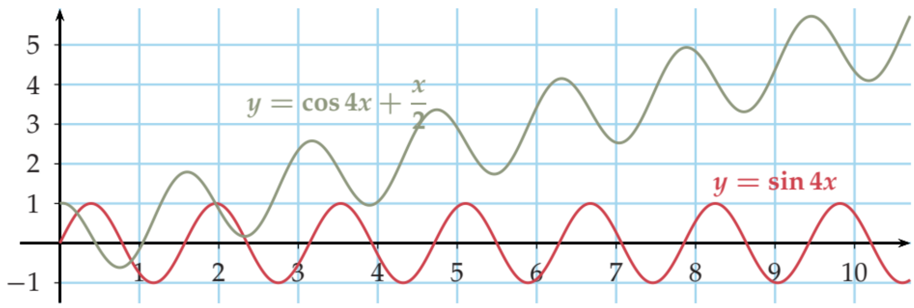
Exemple

Soit f la fonction racine carrée. On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x} = \dots\dots\dots\dots$

En effet, $\sqrt{x}$ devient aussi grand que l'on veut à mesure que x augmente.
Soit un intervalle ouvert $I =]a;+\infty[$. Alors, $f(x)$ sera toujours dans I pour x assez grand.
Graphiquement, si on considère le demi-plan supérieur de frontière une droite d'équation $y = a$, il existe toujours une valeur de a au delà de laquelle $\mathcal{C}_f$ ne sort plus de ce demi-plan.



- On définit de façon analogue :……………………………………………………………………..
- Il existe des fonctions qui n'admettent pas de limite en l'infini. Par exemple, les fonctions ……….. et …………………. n'admettent de limite ni en $+\infty$, ni en $-\infty$.
- Une fonction qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ n'est ………………………………...



Propriétés - Limites infinies des fonctions usuelles en $\pm\infty$

Soit n un entier naturel non nul.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}x^n = \dots\dots\dots\dots\dots$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}x^n = \begin{cases}\dots\dots.. & \text{pour} \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots.. & \text{pour} \dots\dots\dots\dots\dots\end{cases}$

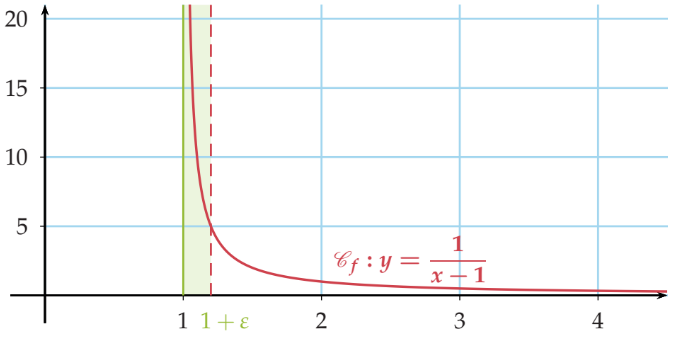
II. Limite infinie en un réel

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ du type $]x_0 - \varepsilon; x_0[$ ou $]x_0; x_0 + \varepsilon[$.
La fonction f a pour limite $+\infty$ en x_0 si ……………………………………………………
…………………………………………………………………………………………..
On note alors : … … … … … … … ..

Exemple

Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x-1}$. On a $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{1}{x-1}\right) =$ … … … ..
En effet, si x tend 1, alors $x - 1$ tend vers … …. et son inverse tend vers … … … ….
Soit un intervalle ouvert $I =]1\,; 1 + \varepsilon[$. Alors, $f(x)$ sera toujours dans I pour x assez proche de x_0.
Graphiquement, $\mathcal{C}_f$ peut être aussi proche que l'on veut de la droite d'équation $x = 1$.



Définition : Asymptote verticale

La droite d'équation … … … … .. est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$ si … … … … … … … …..

Exemple

On a vu précédemment que $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{1}{x-1}\right) =$ … … ..
Donc, la droite d'équation … … … … .. est asymptote verticale à l'hyperbole … … …..

Remarques :

- Lorsque x tend vers x_0, cela peut parfois se faire en augmentant ou en diminuant. On parle alors de limite de f à gauche (resp. droite) en x_0 qu'on note … … … … … … … .. (resp. … … … … … … … … …).
- Une fonction admet une limite en x_0 si, et seulement si, f admet des limites à droite et à gauche en x_0 qui sont ……………… (ce qui n'est pas toujours le cas).
- Une fonction peut très bien ne pas avoir de limite du tout en un point.
  Par exemple, la fonction $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0.

***Propriétés (admises) - Limites finies des fonctions usuelles en* 0**

Soit n un entier naturel non nul.

- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(\frac{1}{x^n}\right) =$ … … ..
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \left(\frac{1}{x^n}\right) = \begin{cases} \dots\dots\dots & \text{pour } \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \text{pour } \dots\dots\dots \end{cases}$