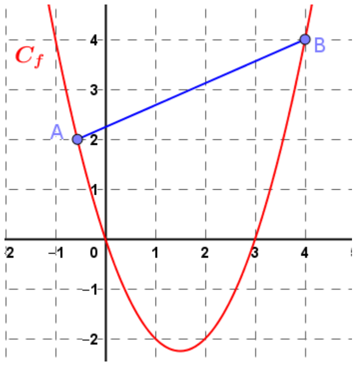
III – Fonction convexe sur un intervalle

III . 1 . Convexité et lecture graphique

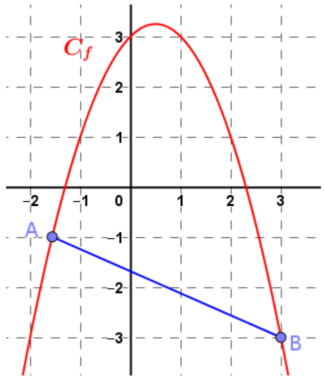
Définition :

On considère une fonction f définie sur un intervalle I et C_f sa courbe représentative dans un repère . Soient A et B deux points distincts de C_f .

1) Si le segment $[AB]$ est au - dessus de la courbe C_f entre A et B , on dit que f est convexe sur I.

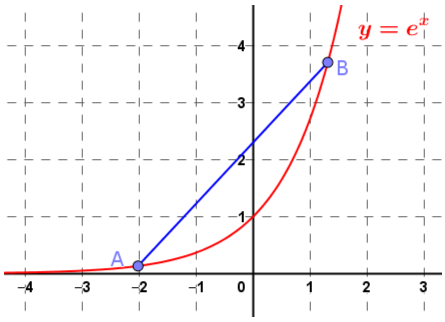


2) Si le segment $[AB]$ est en - dessous de la courbe C_f entre A et B , on dit que f est concave sur I.

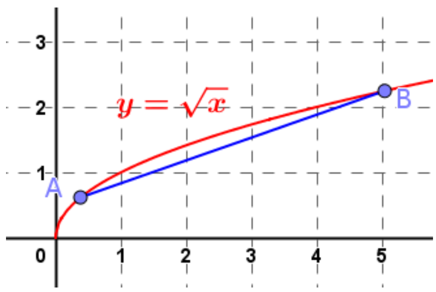


Exemples :

1) La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$



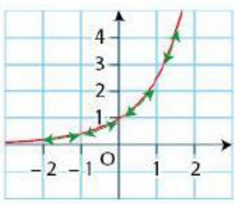
2) La fonction racine carrée est concave sur $]0;+\infty[$



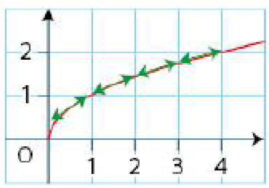
Propriétés (admises) :

On considère une fonction f définie sur un intervalle I et C_f sa courbe représentative dans un repère .

1) f est convexe sur I si et seulement si la courbe C_f est entièrement au - dessus de ses tangentes .



2) f est concave sur I si et seulement si la courbe C_f est entièrement en - dessous de ses tangentes .



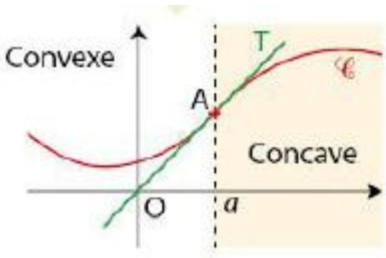
III . 2 . Point d’inflexion d’une courbe

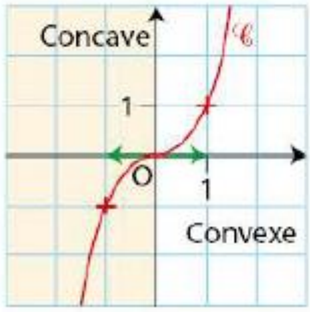
Définition :

On considère une fonction f dérivable sur un intervalle I et sa courbe représentative C dans un repère . Soit $a \in I$.

Dire que le point $A\left(a; f\left(a\right)\right)$ est un point d'inflexion de C signifie qu'au point A , la courbe C traverse sa tangente .

Conséquence : En l'abscisse a d'un point d'inflexion , la fonction f change de convexité .





➢ **Exercices 8 et 9 feuille 1**

III . 3 . Convexité et sens de variation de f'

Propriétés (admises) :

On considère une fonction f dérivable sur un intervalle I .

1) f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I .
2) f est concave sur I si et seulement si f' est décroissante sur I .
3) La courbe représentative de f admet un point d'inflexion au point d'abscisse a si et seulement si f' change de variations en a .

Exemples :

1) Justifier que la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.

2) Justifier que la courbe représentative de la fonction cube admet l'origine du repère comme point d'inflexion .

III . 4 . Convexité et signe de f''

Définition :

On considère une fonction f dérivable sur un intervalle I et sa dérivée f' .
Si f' est elle aussi dérivable sur I , on dit que f est deux fois dérivable sur I et la dérivée de f' est appelée dérivée seconde de f et notée $\boxed{f''}$.

Exemple : Déterminer la dérivée seconde de $f : x \mapsto xe^x$ sur $\mathbb{R}$.

Propriétés (admises) :

On considère une fonction f deux fois dérivable sur un intervalle I .

1) f est convexe sur I si et seulement si $\forall x \in I$ $\boxed{f''(x) \geq 0}$.

2) f est concave sur I si et seulement si $\forall x \in I$ $\boxed{f''(x) \leq 0}$.

3) La courbe représentative de f admet un point d'inflexion au point d'abscisse a si et seulement si f'' s'annule et change de signe en a .

Exemple : Etudier la convexité de la fonction de l'exemple précédent et l'existence de point d'inflexion .

Propriété :

On considère une fonction f deux fois dérivable sur un intervalle I .
Si $f''(x) \geq 0$ alors la courbe représentative de f est au - dessus de ses tangentes .