Suite : généralités

1 Définition

définition : une suite (u_n) est une fonction définie de $\mathbb{N}$ (ou éventuellement $\mathbb{N} - [\![0,k]\!]$) dans $\mathbb{R}$. À un rang donné n, on associe un nombre réel noté u_n.

$$(u_n) \quad : \quad \mathbb{N} \text{ ou } \mathbb{N} - [\![0,k]\!] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto u_n$$

Remarque :
- $\mathbb{N} - [\![0,k]\!]$ est l'ensemble $\mathbb{N}$ privé des premiers naturels jusqu'à k
- u_n est appelé le terme général de la suite (u_n).
- Bien faire la différence entre la suite noté (u_n) et le terme général noté u_n
- Si une suite est définie à partir du rang p, on la note $(u_n)_{n \geqslant p}$

Exemples :
- (u_n) : 2 ; 5 ; 8 ; 11 ; 14 ; 17 ; ... suite arithmétique
- (v_n) : 3 ; 6 ; 12 ; 24 ; 48 ; 96 ; ... suite géométrique

2. Définir et programmer une suite

a) On peut définir une suite de **façon explicite** : $u_n = f(n)$

$$u_n = \frac{1}{n} \quad n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_n = \sqrt{n-3} \quad n \geqslant 3$$

b) On peut aussi définir une suite de **façon récurrente** à un ou plusieurs termes :

- À un terme : $u_{n+1} = f(u_n)$

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 0{,}75u_n + 2 \end{cases}$$

(u_n) : 4 ; 5 ; 5,75 ; 6,3125 ; ...

n	5	10	20	30
u	7,050 8	7,774 7	7,987 3	7,999 9

(u_n) semble croissante et converger vers 8

Programme de (u_n) en langage naturel

Entrées et initialisation
  Lire n
  $4 \to u$
Traitement
  pour i variant de 1 à n **faire**
    $0,75u + 2 \to u$
  fin
Sorties : Afficher u

Python : un programme **récursif** part de l'indice n puis descend progressivement l'indice jusqu'au premier terme. Un programme **itératif** part de l'indice du premier terme jusqu'à l'indice n.

⚠ range(1 , $n+1$) est l'ensemble des entiers naturels de 1 jusqu'à n

```python
def u(n):
    if n==0:
        return 4
    return 0.75*u(n-1)+2
```

Programme récursif

```python
def u(n):
    u=4
    for i in range(1,n+1):
        u=0.75*u+2
    return u
```

Programme itératif

- À deux termes : $u_{n+2} = f(u_{n+1}, u_n)$

$$\begin{cases} u_0 = 1, \quad u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

$(u_n) : 1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 5\,;\ 8\,;\ 13\,;\ldots$

N	10	15	20	30
V	89	987	10 946	1 346 269

Prgm : on introduit 3 variables u, v et w : u et v pour la relation de récurrence et w pour ne pas écraser l'ancienne valeur de v que l'on affecte à u.

Programme de (u_n) en langage naturel

Entrées et initialisation
Lire n
$1 \to u \quad , \quad 1 \to v$
Traitement
pour i variant de 2 à n **faire**
$u + v \to w$
$v \to u$
$w \to v$
fin
Sorties : Afficher v

Python :

```
def u(n):
    if n==0:
        return 1
    elif n==1:
        return 1
    return u(n-1)+u(n-2)
```

Programme récursif

```
def u(n):
    u=1
    v=1
    for i in range(2,n+1):
        w=u+v
        u=v
        w=v
    return u(n-1)+u(n-2)
```

Programme itératif

c) On peut encore définir une suite par l'intermédiaire d'une autre suite ou par une somme de termes, à l'aide d'une intégrale, etc...

On peut définir la suite (v_n) à partir d'une suite (u_n) par : $v_n = u_n - 4$

$$w_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Python : donner une valeur approchée de (w_n), n étant donné :

Par exemple, pour w_5, w_{10}, w_{50}.

- $w_5 \approx 2,283$
- $w_{10} \approx 2,923$
- $w_{50} \approx 4,499$

Remarque : On pourrait montrer que cette suite (w_n) diverge

```
def w(n):
    w=0
    for i in range(1,n+1):
        w=w+1/i
    return w
```

Programme itératif

3 Variation ou monotonie d'une suite

Définition : Soit (u_n) une suite numérique. On dit que :

- la suite (u_n) est strictement **croissante** (à partir d'un certain rang k) lorsque
$$u_{n+1} > u_n \quad \text{pour tout entier} \quad n \geqslant k$$
- la suite (u_n) est strictement **décroissante** (à partir d'un certain rang k) lorsque
$$u_{n+1} < u_n \quad \text{pour tout entier} \quad n \geqslant k$$
- la suite (u_n) est **monotone** (à partir d'un certain rang k) si elle est croissante ou décroissante à partir d'un certain rang k
- la suite (u_n) est **stationnaire** s'il existe un k tel que
$$u_{n+1} = u_n \quad \text{pour tout entier} \quad n \geqslant k$$
- la suite (u_n) est **constante** lorsque $u_{n+1} = u_n$ pour tout entier n du domaine de définition

4 Comment montrer la monotonie d'une suite

Règle : Pour montrer la monotonie d'une suite,

- on étudie le signe de la quantité $u_{n+1} - u_n$
si la quantité est positive (resp négative) à partir d'un certain rang k, la suite est croissante (resp décroissante) pour $n \geqslant k$
- si tous les termes de la suite sont strictement positifs à partir d'un certain rang k, on compare la quantité $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1
si la quantité est supérieure à 1 (resp inférieure à 1) à partir d'un certain rang k, la suite est croissante (resp décroissante) pour $n \geqslant k$
- si la suite est définie de façon explicite, on étudie les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+$

Exemples :

- Montrer que la suite (u_n) définie pour tout n par : $u_n = n^2 - n$ est croissante.
- Montrer que la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = \dfrac{2^n}{n}$ est croissante.
- Montrer que la suite (u_n) définie pour tout $n \geqslant 2$ par : $u_n = \dfrac{2n+1}{n-1}$ est décroissante.

5 Visualisation d'une suite

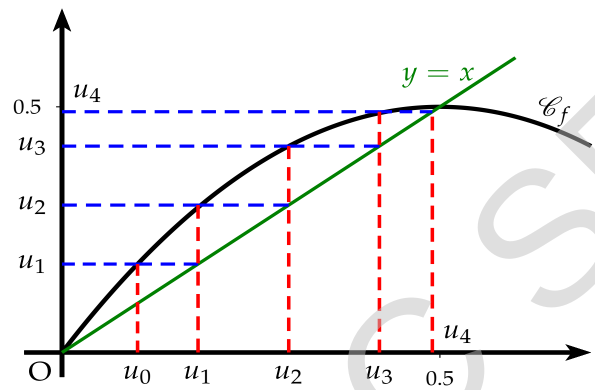
Pour visualiser une suite définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, il suffit de tracer la courbe de la fonction associée f et la droite $y = x$. La droite sert à reporter les termes de la suite sur l'axe des abscisses.

Soit la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0,1 \\ u_{n+1} = 2u_n(1-u_n) \end{cases}$$

On obtient alors le graphe suivant, après avoir tracé la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie par :

$$f(x) = 2x(1-x)$$

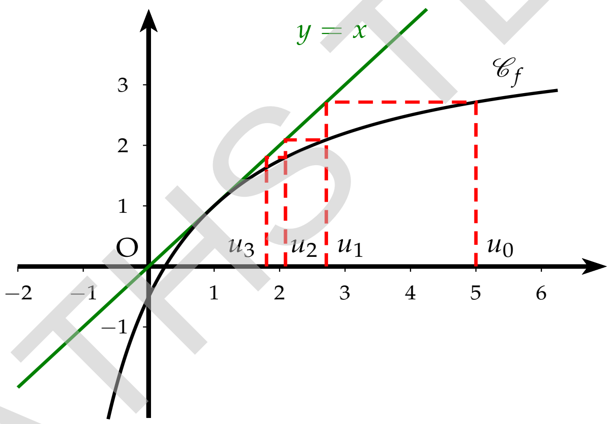


Exemple : Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

f est la fonction définie sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+2}$.

Après avoir tracé la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f et la droite d'équation $y = x$, placer u_0 sur l'axe des abscisses, construire u_1, u_2 et u_3 en laissant apparents les traits de construction. Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (u_n) ?



D'après ce graphique, on peut conjecturer :

- que la suite est décroissante
- qu'elle semble converger vers 1 qui est l'abscisse du point d'intersection entre la droite et la courbe

6 Suite arithmétique (rappels)

a. Définition

Définition : Une suite arithmétique (u_n) est définie par :

- un premier terme u_0 ou u_p
- une relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n + r$ r étant la raison de la suite

b. Comment la reconnaît-on ?

Une suite (u_n) est arithmétique si la différence entre deux termes consécutifs est constante. Cette constante est alors la raison.

$$\forall n \geqslant p \qquad u_{n+1} - u_n = r \quad \Leftrightarrow \quad (u_n) \text{ est une suite arithmétique de raison}$$

c. Expression du terme général en fonction de n

Règle 2 : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r

- Si le premier terme est u_0, alors : $u_n = u_0 + nr$
- Si le premier terme est u_p, alors : $u_n = u_p + (n-p)r$

d. Somme des premiers termes

Théorème : D'une façon générale, la somme des premiers termes d'une suite arithmétique obéit à :

$$S_n = \text{Nbre de termes} \times \frac{\Sigma \text{ termes extrêmes}}{2}$$

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n \quad \text{alors} \quad S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n \quad \text{alors} \quad S_n = (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right)$$

6 Suite géométrique (rappels)

a. Définition

Définition : Une suite géométrique (u_n) est définie par :

- un premier terme u_0 ou u_p
- une relation de récurrence : $u_{n+1} = q \times u_n$ $\quad q$ étant la raison de la suite

b. Comment la reconnaît-on ?

Une suite est géométrique si le quotient entre deux termes consécutifs est constant. Cette constante est alors la raison.

$$\forall n \geqslant p \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} = q \quad \Rightarrow \quad (u_n) \text{ est une suite géométrique de raison } q$$

c Expression du terme général en fonction de n

Règle : Soit (u_n) une suite géométrique de raison q

- Si le premier terme est u_0, alors : $u_n = q^n \times u_0$
- Si le premier terme est u_p, alors : $u_n = q^{n-p} \times u_p$

d Somme des premiers termes

Théorème : D'une façon générale, la somme des premiers termes d'une suite géométrique ($q \neq 1$) obéit à :

$$S_n = 1^{\text{er}} \text{ terme} \times \frac{1 - q^{\text{nbre termes}}}{1 - q}$$

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n \quad \text{alors} \quad S_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$