Dénombrement

I. Définitions

Définition - Ensemble

Un ensemble E est une ………………………… distincts x que l'on appelle …………………...
On dit alors que x ………………….. E (respectivement x n'appartient pas à E) et on note … … … ….
(respectivement … … … … …).

Exemples

- $E = \{a\ ;\ b\ ;\ c\}$ est un ensemble à ………………...
- Les ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ ont une ………………… d'éléments.

Remarques

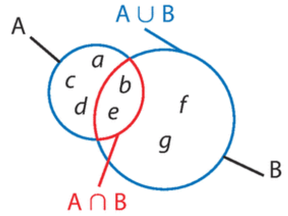
- Pour lister un ensemble d'éléments isolés les uns des autres, on utilise des …………………..
- L'ensemble qui ne contient aucun élément s'appelle ………………………… et se note … … ..
- Deux ensembles A et B dont l'intersection est vide sont dits ……………….. et on écrit … … … … … ….
- L'ordre n'intervient pas : $\{a\ ;\ b\} =$ … … …. et il n'y a pas répétition d'un élément $\{a\ ;\ a\} =$ … … ..

Définition - Partie

On appelle partie d'un ensemble E un ensemble F tel que tous les éléments de F appartiennent ……
On dit que F est ………. dans E et on note … … … … .. (on dit aussi que F est un sous-ensemble de E).
La réunion $A \cup B$ de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant ………………..
L'intersection $A \cap B$ des ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant ………………….

Exemple

L'ensemble F = {a ; b} est inclus dans l'ensemble E précédent (F ⊂ E), c'est une partie de E.
Avec A={a ; b ; c ; d ; e} et B={b ; e ; f ; g}
$A \cup B =$ … … … … … … … … et $A \cap B =$ … … ….



Remarques

- Une partie à 1 élément s'appelle un …………….., une partie à 2 éléments ……………..
- L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble de toutes les ……………., c'est-à-dire de tous les sous-ensembles possibles de E.

Exemple

L'ensemble des parties de $E = \{a\ ;\ b\ ;\ c\}$ est $\mathcal{P}(E) =$ ….

Définition - p-liste ou p-uplet

On appelle p-uplet ou p-liste d'un ensemble E une …………………….. d'objets qu'on appelle, selon les cas, ……………., ……………………, …………………… ou …………….
Un p-uplet s'écrit avec des …………………………

Remarques

- Un 2-uplet s'appelle un ……………., un 3-uplet s'appelle un …………….
- L'ordre intervient (a , b)≠………. et les objets peuvent être identiques : (a , a) existe (il suffit de penser aux ………………..).

Définition - Principe multiplicatif

L'ensemble noté $E \times F$, appelé produit cartésien, est l'ensemble des …………………….. tels que … … …. et … … … …

Exemple

$E = \{a\,;b\,;c\}$, alors $E \times F =$ ….

- **Méthode 1 – Déterminer des ensembles (page 339)**
- **Méthode 2 – Utiliser un diagramme pour déterminer une partie d'un ensemble (page 339)**

II. Dénombrement

Propriété - Principe additif

Le nombre d'éléments de la réunion $E \cup F$ d'un ensemble E à n éléments et d'un ensemble F à p éléments, tels que E et F soient disjoints, est … … … … … … ..

Exemple

Soit A= $\{a\,;\ b\,;\ c\,;\ d\,;\ e\}$ et B = $\{f\,;\ g\,;\ h\}$. Le nombre d'éléments de $A \cup B$ est … … … … … ….

Propriété - Principe multiplicatif

Le nombre d'éléments de l'ensemble $E \times F$ d'un ensemble E à n éléments et un ensemble F à p éléments est … … … … … ….

Exemple

Pour E=$\{a;\ b\,;\ c\}$ et $F = \{f\,;g\}$, le nombre d'éléments de $E \times F$ est … … … … … …..

Propriété - Nombre de p-uplets d'un ensemble à n éléments

Le nombre de p-uplets d'un ensemble à n éléments est … … … ….

Définition - Permutations d'un ensemble à n éléments

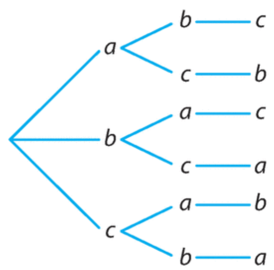
On appelle permutations d'un ensemble à n éléments tous les …………………….. dans les n-uplets constitués des éléments de l'ensemble.

Propriété - Nombre de permutations d'un ensemble à n éléments

Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments s'écrit $n!$, se lit « ………………….. » et est défini par …

Exemple

Soit $E = \{a\,;\ b\,;\ c\}$. Tous les triplets possibles sont : … … … … … … … … … … … ….
… . ..
Cela correspond à 3 choix pour la première composante, puis 2 choix pour la deuxième et 1 dernier choix pour la troisième.
On peut représenter cette situation par l'arbre ci-contre.



Propriétés - Factorielle

$0! =$ … … $n! =$ … … … … … …. $(n+1)! =$ … … … … … … … ….

Propriété - Nombre de p-uplets d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments

Le nombre de p-uplets d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments est … … … … … … ….

Exemple
Soit $E = \{a\ ;\ b\ ;\ c\ ;\ d\}$. Tous les couples d'éléments distincts possibles sont : … … … … … … … … … … … . . ….
Ce qui donne par le calcul … … … … … … … … … … … … … … … … ..

- Méthode 3 – Dénombrer des ensembles simples (page 341)
- Méthode 4 – Utiliser le principe multiplicatif (page 341)

III. Combinaisons

Définition – Combinaison

Une combinaison de p éléments parmi n éléments, notée … … …., est le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments.

Propriété - Nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments

On calcule une combinaison de la manière suivante : … … … … … … … … … …

Propriétés – Combinaisons

$\binom{n}{0} =$ … … .. $\binom{n}{1} =$ … … $=$ … … $\binom{n}{p} =$ … ….

Propriété - Relation et triangle de Pascal

On a la relation $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} =$ … … … … …. qui peut s'illustrer par le triangle de Pascal.

	0	1	2	3	…
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
…					

Démonstration

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \text{… … …}$$

Remarque

On peut faire le lien avec les identités remarquables :

$(a+b)^2 =$ … … … … … … … … $(a+b)^3 =$ … … … … … … … … … …

Propriété - Nombre de parties d'un ensemble à n éléments

Le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est … … … .. De plus, :………………………………

Démonstration

Par dénombrement : on compte le nombre de parties d'un ensemble à n éléments.
Il y a $\binom{n}{0}$ parties à 0 élément, $\binom{n}{1}$ parties à 1 élément, et plus généralement parties $\binom{n}{p}$ à p éléments, pour tout entier p compris entre 0 et n. Donc on obtient la somme $\binom{n}{p}$ des pour p allant de 0 à n.

- Méthode 5 – Dénombrer des combinaisons (page 343)
- Méthode 6 – Utiliser les combinaisons (page 343)