

Primitives et Calcul d'une intégrale

I) Primitive

1) Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

On appelle **primitive** de f sur I , toute fonction F dérivable sur I dont la dérivée F' est égale à f .

Exemple :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 5x + 2$.

Les fonctions F et G définies sur \mathbb{R} par $F(x) = \frac{5}{2}x^2 + 2x - 7$ et $G(x) = \frac{5}{2}x^2 + 2x + 8$ sont des primitives de f .

2) Ensemble des primitives d'une fonction :

a) Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On suppose qu'il existe une primitive F de f sur I .

L'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions G définies sur I par $G(x) = F(x) + k$ où k décrit \mathbb{R} .

Preuve :

Soit G une primitive de f sur I . On a donc $G' = F' = f$.

Donc pour tout $x \in I$, on a $(G - F)'(x) = 0$.

Donc la fonction $G - F$ est constante sur l'intervalle I , il existe donc un réel k tel que pour tout $x \in I$, on a $(G - F)(x) = k$ d'où $G(x) = F(x) + k$ pour tout $x \in I$.

Réciproquement soit G la fonction définie sur I par $G(x) = F(x) + k$ où $k \in \mathbb{R}$.

On a $G'(x) = F'(x) + 0$ donc $G'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$ donc G est une primitive de f sur I .

Remarques :

Si la fonction f admet une primitive sur un intervalle I alors elle en admet une infinité.

Soit G et F deux primitives de f sur I tels que $G(x) = F(x) + k$, alors dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentative de G est obtenue à partir de la courbe représentative de F par translation de vecteur \vec{j} .

b) Primitive prenant une valeur donnée en un réel donné :

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On suppose que f admet des primitives sur I . Soit x_0 et y_0 deux réels tels que $x_0 \in I$.

Il existe une unique primitive F de f vérifiant $F(x_0) = y_0$

Preuve :

La fonction f admet des primitives, soit G une primitive de f .

On considère la fonction F définie par $F(x) = G(x) - G(x_0) + y_0$

F est aussi une primitive de f car $F'(x) = G'(x) = f(x)$.

De plus on a $F(x_0) = G(x_0) - G(x_0) + y_0 = y_0$ **Donc F existe.**

Soit H une autre primitive de f vérifiant $H(x_0) = y_0$.

On sait qu'il existe un réel k tel que $H(x) = F(x) + k$ pour tout $x \in I$.

Donc en particulier on a $H(x_0) = F(x_0) + k$ d'où $y_0 = y_0 + k$ donc $k = 0$ donc $H = F$.

La fonction F est donc bien unique.

Exemple :

Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 3$

Déterminer la primitive F de f telle que $F(3) = -5$

On vérifie facilement que les primitives de f sont $F(x) = x^2 + 3x + k$, $k \in \mathbb{R}$

Si on veut $F(3) = -5$ alors $3^2 + 3 \times 3 + k = -5$ d'où $k = -23$

La primitive cherchée est donc $F(x) = x^2 + 3x - 23$

3) Primitives des fonctions usuelles :

Soit C un réel quelconque.

f est définie sur I par $f(x) =$	Les primitives de f sur I sont définies par : $F(x) =$	L'intervalle $I =$
k	$kx + C$	\mathbf{R}
x	$\frac{1}{2}x^2 + C$	\mathbf{R}
$x^n \quad (n \geq 1)$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	\mathbf{R}
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + C$	$] -\infty ; 0 [$ ou $] 0 ; +\infty [$
$\frac{1}{x^n} \quad (n \geq 2)$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$	$] -\infty ; 0 [$ ou $] 0 ; +\infty [$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$	$] 0 ; +\infty [$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + C$	$] 0 ; +\infty [$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$	\mathbf{R}
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$	\mathbf{R}
e^x	$e^x + C$	\mathbf{R}

4) Primitives et opérations sur les fonctions :

Propriétés de linéarité :

Soit F et G des primitives respectives des fonctions f et g sur un intervalle I alors :

- $F + G$ est une primitive de la fonction $f + g$ sur I ;
- Pour tout réel k , kF est une primitive de la fonction kf sur I .

Exemples :

- Les primitives de $f(x) = 3x^2$ sont $F(x) = 3 \frac{x^3}{3} + k = x^3 + k$, $k \in \mathbb{R}$
- Les primitives de $f(x) = -\frac{3}{x^2} + \frac{5}{x} - 2x$ sont sur $]0 ; +\infty[$:

$$F(x) = \frac{3}{x} + 5 \ln(x) - x^2 + k, k \in \mathbb{R}$$

Primitives et composées de fonctions

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

Fonction f	Primitives de f sur I	Condition sur u
$u'u^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	$\frac{1}{n+1} u^{n+1} + C$	Aucune condition particulière
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + C$	$u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{u^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$ et $n \neq 1$)	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} + C$	$u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + C$	$u(x) > 0$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u) + C$	$u(x) > 0$
$u'e^u$	$e^u + C$	Aucune condition particulière

Exemples :

Pour chaque fonction f , déterminer ses primitives et en déduire une primitive sur l'intervalle I .

a) $f(x) = x^2(x^3 - 1)^5$; $I = \mathbb{R}$; b) $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2-1}}$; $I =]1; +\infty[$.

c) $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$; $I =]2; +\infty[$; d) $f(x) = \frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$; $I =]0; +\infty[$.

Réponses :

a) $f(x) = x^2(x^3 - 1)^5$ en utilisant la formule $u'u^n$ avec $u(x) = x^3 - 1$ on obtient :

$$F(x) = \frac{1}{18}(x^3 - 1)^6 + C$$

b) $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2-1}}$ en utilisant la formule $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(x) = x^2 - 1$ on obtient :

$$F(x) = 3\sqrt{x^2 - 1} + C$$

c) $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$ en utilisant la formule $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2 - 4$ on obtient :

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2 - 4) + C$$

d) $f(x) = \frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$ en utilisant la formule $u'e^u$ avec $u(x) = \frac{1}{x}$ on obtient :

$$F(x) = e^{\frac{1}{x}} + C$$

II) Calcul d'une intégrale :

1) Primitive d'une fonction continue :

a) Théorème :

Si f est une fonction continue sur un intervalle I et si a est un réel de l'intervalle I alors la fonction F définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a .

Preuve :

Cas où f est une fonction continue et croissante sur I .

Soit x_0 un réel de I et soit h tel que $x_0 + h$ appartienne à I .

$$\text{On a } F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(x)dx - \int_a^{x_0} f(x)dx$$

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(x)dx + \int_{x_0}^a f(x)dx$$

D'après la relation de Chasles on a $F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx$

- Si $h > 0$, la fonction f étant croissante, pour tout $x \in [x_0; x_0 + h]$, on a :

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_0 + h)$$

D'après l'inégalité de la moyenne, on a :

$$f(x_0) \leq \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h)$$

- Si $h < 0$, la fonction f étant croissante, pour tout $x \in [x_0; x_0 + h]$, on a :

$$f(x_0 + h) \leq f(x) \leq f(x_0)$$

D'après l'inégalité de la moyenne, on a :

$$f(x_0 + h) \leq \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \leq f(x_0)$$

La fonction f est continue en x_0 donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0).$$

Donc d'après le théorème des gendarmes, on a : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(x_0)$

Donc la fonction F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$.

Donc F est dérivable sur I et $F' = f$. **F est une primitive de f sur I .**

On a $F(a) = \int_a^a f(x)dx = 0$. **F est donc l'unique primitive de f qui s'annule en a .**

On peut faire une démonstration équivalente lorsque f est continue et décroissante sur I

Exemples :

Exemple 1 : Soit F la fonction définie sur \mathbb{R} par $F(x) = \int_0^x \frac{1}{t^2+1} dt$.

Déterminer le sens de variation de F sur \mathbb{R} .

Réponse :

D'après ce qui précède F est l'unique primitive de $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ qui s'annule en $x = 0$

Donc $F'(x) = \frac{1}{x^2+1}$ et $F'(0) = 0$ donc $F'(x) \geq 0$ sur \mathbb{R} et de ce fait F est strictement croissante sur \mathbb{R}

Exemple 2 : Soit F la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$

Déterminer le sens de variation de F sur $[1; +\infty[$

Réponse :

F est l'unique primitive de $f(x) = \frac{1}{x}$ qui s'annule en $x = 1$

Donc $F'(x) = \frac{1}{x}$ et $F'(1) = 0$ donc $F'(x) \geq 0$ sur $[1; +\infty[$ et de ce fait

F est strictement croissante sur $[1; +\infty[$

Remarque $F(x) = \ln(x)$

2) Intégrales et primitives :

Propriété :

**Soit f une fonction continue sur un intervalle I , a et b sont deux réels de I .
Soit F une primitive de f sur I . On a $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$**

Notation :

On écrit aussi $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$

Preuve :

Soient F la primitive de f qui s'annule en a , on a $\int_a^b f(x)dx = F(b)$

Or $F(a) = 0$ donc $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Si G est une autre primitive de f alors il existe un réel k tel que :

$$G(x) = F(x) + k \text{ pour tout } x \in I.$$

$$\text{Donc } G(b) - G(a) = (F(b) + k) - (F(a) + k) = F(b) - F(a).$$

$$\text{Donc on a aussi } \int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

Exemples :

Exemple 1 : Calculer $I = \int_1^3 x^3 dx$

Réponse :

$$I = \left[\frac{x^4}{4} \right]_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{80}{4} = 20$$

Exemple 2 : Calculer $J = \int_1^e \frac{1}{x} \ln(x) dx$

Réponse :

$$J = \left[\frac{1}{2} (\ln(x))^2 \right]_1^e = \frac{1}{2} ((\ln(e))^2 - (\ln(1))^2) = \frac{1}{2}$$