EXERCICE

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$u(x) = \ln(x) + x - 3.$$

1. Justifier que la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

2. Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre 2 et 3.

3. En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)[\ln(x) - 2] + 2.$$

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0.

2. (a) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{u(x)}{x^2}$ où u est la fonction définie dans la partie A.

(b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Partie C

Soit $\mathcal{C}'$ la courbe d'équation $y = \ln(x)$.

1. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f(x) - \ln(x) = \dfrac{2 - \ln(x)}{x}$.

En déduire que les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont un seul point commun dont on déterminera les coordonnées.

2. On admet que la fonction H définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$\mathrm{H}(x) = \frac{1}{2}[\ln(x)]^2$$

est une primitive de la fonction h définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

Calculer $\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^{e^2} \frac{2 - \ln x}{x}\,\mathrm{d}x$.

Interpréter graphiquement ce résultat.