

# Lois à densité. Loi normale

## 1 Lois à densité

### 1.1 Généralités

**Définition 1 :** On appelle **densité de probabilité** d'une variable aléatoire continue  $X$ , la fonction  $f$  continue et positive sur un intervalle  $I$  ( $[a; b]$ ,  $[a; +\infty[$  ou  $\mathbb{R}$ ) telle que :

- $P(X \in I) = \int_{(I)} f(t) dt = 1$
- Pour tout intervalle  $J = [\alpha, \beta]$ , on a :

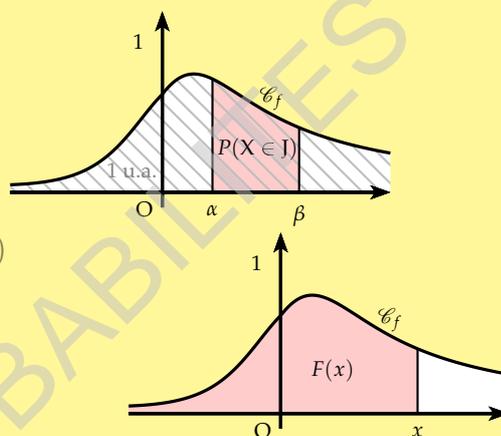
$$P(X \in J) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$$

- La fonction  $F$  définie par :  $F(x) = P(X \leq x)$  est appelée la **fonction de répartition** de la variable  $X$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

- L'espérance mathématique d'une variable aléatoire continue  $X$ , de densité  $f$  sur  $I$ , est :

$$E(X) = \int_{(I)} t f(t) dt$$



### 1.2 Loi uniforme

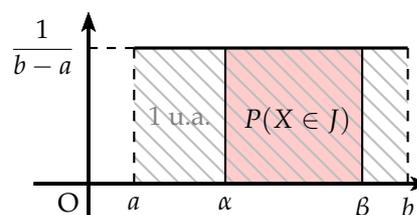
**Définition 2 :**  $X$  suit une loi uniforme sur  $I = [a, b]$ , alors :

$$f(t) = \frac{1}{b-a}$$

Pour tout intervalle  $J = [\alpha, \beta]$  inclus dans  $I$ , on a :

$$P(X \in J) = \frac{\beta - \alpha}{b - a} = \frac{\text{longueur de } J}{\text{longueur de } I}$$

La probabilité est proportionnelle à la longueur de l'intervalle.



## 1.3 Loi exponentielle

**Définition 3** :  $X$  suit une loi exponentielle de paramètre réel  $\lambda$  alors :

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

On a les relations suivantes

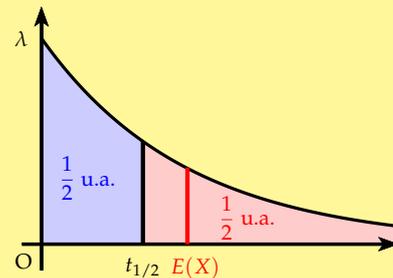
- La fonction de répartition :  $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$
- $P(X \leq a) = 1 - e^{-\lambda a}$  et  $P(X \geq a) = e^{-\lambda a}$
- $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$

**Théorème 1** : La loi exponentielle est une loi **sans mémoire**

$$\forall t > 0 \text{ et } h > 0 \text{ on a } P_{X \geq t}(X \geq t + h) = P(X \geq h)$$

**Théorème 2** :  $X$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  alors :

- l'espérance :  $E(X) = \frac{1}{\lambda}$
- La demi vie :  $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$
- $E(X) = \frac{t_{1/2}}{\ln 2} \simeq 1,44 t_{1/2}$



## 2 La loi normale

### 2.1 La loi normale centrée réduite

**Définition 4** : On appelle densité de probabilité de Laplace-Gauss, la fonction  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

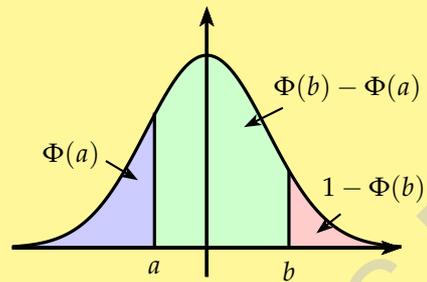
$X$  suit une loi normale centrée réduite,  $\mathcal{N}(0, 1)$ , si sa densité de probabilité est égale à la fonction  $\varphi$ .

Sa fonction de répartition  $\Phi$  vaut :  $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$

L'espérance de  $X$  vaut 0 et son écart-type 1 d'où  $\mathcal{N}(0, 1)$

**Théorème 3 :**  $X$  suit la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  alors pour tous réels  $a$  et  $b > a$  on a :

- $P(X \leq a) = \Phi(a)$
- $P(X \geq b) = 1 - \Phi(b)$
- $P(a \leq X \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a)$
- $P(X \leq -|a|) = 1 - \Phi(|a|)$



**Théorème 4 :**  $X$  est une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite. Soit  $\alpha \in ]0; 1[$ , il existe un **unique** réel **strictement positif**  $u_\alpha$  tel que :

$$P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$$

Il est bon de retenir les valeurs de  $u_{0,05}$  et  $u_{0,01}$  :

- $P(-1.96 \leq X \leq 1.96) = 0,95$
- $P(-2.58 \leq X \leq 2.58) = 0,99$

## 2.2 La loi normale générale

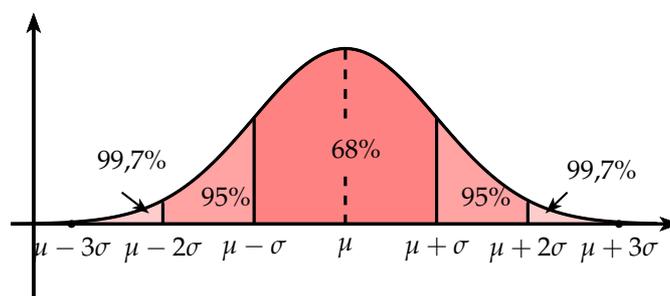
**Définition 5 :** Changement de variable

$X$  suit une loi normale de paramètres  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , alors :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \text{ suit une loi normale } \mathcal{N}(0, 1)$$

On a alors :  $E(X) = \mu$  et  $V(X) = \sigma^2$

On obtient les intervalles caractéristiques :



## 2.3 Approximation normale d'une loi binomiale

**Théorème 5 :** Théorème de Moivre-Laplace

$X$  suit la loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$  et  $Z$  tel que :

$$Z = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)} = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

Pour tous nombres  $a$  et  $b$  tels que  $a < b$ , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(a \leq Z \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Conditions de l'approximation d'une loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$  par une loi normale  $\mathcal{N}[np, np(1-p)]$

$$n \geq 30, \quad np \geq 5 \quad \text{et} \quad n(1-p) \geq 5$$

⚠ Faire la correction de continuité :  $P(7 \leq X \leq 15) = P_N(6,5 \leq X \leq 15,5)$